Kolokwium z Analizy. Zadania przygotowawcze.

Spośród tych zadań najważniejsze są pierwsze, polegające w skrócie na policzeniu „całki z czegoś głupiego po czymś głupim". Umiejętność zrobienia zadań 1–5 (z dokładnością do ewentualnych niedużych błędów rachunkowych) wystarcza na ocenę 4.5. Nieumiejętność zrobienia żadnego z tych zadań (nawet, jeśli się zrobi wszystkie inne) nie pozwala na osiągnięcie oceny wyższej, niż 4.5. Zadania z kohomologii są bardzo proste i, oczywiście, nieobowiązkowe.

Zadanie 1. Oblicz całkę

$$\int_S x^3 dy \wedge dz,$$

gdzie S jest połówką sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$.

Zadanie 2. Oblicz pole powierzchni torusa o dużym promieniu R i małym promieniu r.

Zadanie 3. Oblicz całkę

$$\int_M (x_1^2 + x_3^2 + x_5^2)(dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_3) \wedge dx_4 \wedge dx_5 \wedge dx_7,$$

gdzie $M = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 = 1\}$.

Zadanie 4. Oblicz środek ciężkości jednorodnej półsfery $x^2+y^2+z^2+u^2 = 1$, $u \geq 0$ w $\mathbb{R}^4$. Współrzędne środka ciężkości liczymy następująco:

$$M_x = \left(\int_S \rho\right)^{-1} \cdot \int_S x\rho,$$

gdzie ρ jest gęstością, S jest powierzchnią. M_x jest współrzędną x, i ten właśnie x występuje po prawej stronie wzoru.

Zadań tego typu nie robiliśmy na ćwiczeniach, bo są one wyłącznie rachunkowe.

Zadanie 5. Oblicz pole powierzchni ograniczonej przez kardioidę $r = 2(1 + \cos\phi)$, $\phi \in [0, 2\pi]$.

Zadanie 6. Niech $v = (v_x, v_y, v_z)$ będzie polem wektorowym na $\mathbb{R}^3$. Niech $\Phi(t)$ będzie potokiem tego pola, czyli grupą dyfeomorfizmów. Niech $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ oznacza formę objętości na $\mathbb{R}^3$. Określamy $\omega_t = \Phi(t)^*\omega$. Udowodnij, że

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\omega_t - \omega) = (\operatorname{div} v) \cdot \omega.$$

Jest to wariant twierdzenia Liouvilla. Mówi ono, że $\Phi(t)$ zachowuje objętość wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{div} = 0$.

Zadanie 7. Niech A i B będą dowolnymi macierzami 3×3. Określamy pole wektorowe

$$v_A(x, y, z) = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z).$$

Udowodnij, że $[v_A, v_B] = v_{[A,B]}$.

Zadanie 8. Udowodnij, że dla dowolnej 1–formy różniczkowej ω zachodzi

$$d\omega(v_1, v_2) = v_1 \cdot \omega(v_2) - v_2 \cdot \omega(v_1) - \omega([v_1, v_2]),$$

gdzie $v_i\cdot$ oznacza różniczkowanie kierunkowe w kierunku v_i.

Zadanie 9. Niech U i V będą dwoma podzbiorami otwartymi $\mathbb{R}^n$. Niech $H : U \to V$ będzie dyfeomorfizmem takim, że dla każdej $f : V \to \mathbb{R}$ klasy C^1 mamy

$$\nabla(f(H(x)) = (DH)^{-1}\nabla f(y)|_{y=H(x)}.$$

Wykaż, że DH jest przekształceniem ortogonalnym.

Zadanie 10. Oblicz grupy kohomologii dwuprecla, czyli torusa z dwoma dziurami.

Zadanie 11. Niech M będzie rozmaitością. Niech $\omega_1 \in H^k(M)$ i $\omega_2 \in H^l(M)$ będą dwoma reprezentantami klas kohomologii. Rozpatrzmy $\eta = \omega_1 \wedge \omega_2$. Wykaż, że $d\eta = 0$, ponadto klasa kohomologii formy η nie zależy od wyboru reprezentantów ω_1 i ω_2. Zauważ, że dobrze określone odwzorowanie $H^k(M) \times H^l(M) \to H^{k+l}(M)$ jest dwuliniowe i przemienne, gdy $k \cdot l$ parzyste, zaś antyprzemienne, gdy $k \cdot l$ nieparzyste.

Zadanie 12. Niech M_1 i M_2 będą rozmaitościami. Udowodnij, że $H^n(M) = \oplus_{p+q=n} H^p(M_1) \otimes H^q(M_2)$.

Wskazówka. Zadanie to jest uogólnieniem Zadania 3