1. Propozycje zadań przygotowawczych przed egzaminem

Zadanie 1. Dowolną uczciwą i poprawną metodą oblicz (tzn. wyraź nie używając funkcji specjalnych)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Gamma(\varepsilon) - \Gamma(-\varepsilon).$$

Zadanie 2. Niech M będzie zwartą, zorientowaną powierzchnią genusu g. Wykaż, że $\dim H^1(M) = 2g$.

Zadanie 3. Wyraź objętość zadanej bryły w $\mathbb{R}^3$ przez odpowiednią całkę po jej brzegu.

2. Propozycje tematów na egzamin pisemny i ustny

Lista może być niekompletna. Krótki rzut oka na tę listę pozwala stwierdzić z całą pewnością, że w drugim semestrze Analizy II nic się nie działo.

2.1. Część analityczna.

(1) twierdzenie o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki;
(2) twierdzenie o zmajoryzowanym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki;
(3) twierdzenie Fubiniego;
(4) twierdzenie o zamianie zmiennych w całce wielowymiarowej;
(5) funkcje Gamma i Beta Eulera, ich podstawowe własności;
(6) różniczkowanie pod znakiem całki;
(7) lemat Sarda;
(8) słabe twierdzenie o transwersalności.

2.2. Formy różniczkowe.

(1) iloczyn zewnętrzny przestrzeni liniowych;
(2) przykłady form $k-$liniowych antysymetrycznych, baza przestrzeni $k-$form liniowych;
(3) definicja formy różniczkowej;
(4) iloczyn zewnętrzny form różniczkowych;
(5) przeciągnięcie formy przy odwzorowaniu gładkim;
(6) różniczka zewnętrzna, własność $d^2 = 0$;
(7) funktorialność iloczynu zewnętrznego i różniczki (wzory $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$ oraz $f^*(d\omega) = df^*\omega$);
(8) całka z 1–formy, niezależność od parametryzacji;
(9) zależność całki od drogi całkowania, przykłady dla form niezamkniętych ($d\omega \not\equiv 0$) i dla zamkniętych;
(10) zagadnienie, kiedy 1–forma zamknięta jest dokładna, związki z grupą podstawową i jednospójnością przestrzeni;
(11) wzór Cartana dla 1–form ($d\omega(u, v) = u \cdot \omega(v) - v \cdot \omega(u) - \omega([u, v])$).
(12) liczenie pól powierzchni figur przez pewną całkę z 1–formy po ich brzegu;
(13) całkowanie $k-$form po rozmaitościach;
(14) niezależność całki od parametryzacji powierzchni;
(15) wzór Stokesa;
(16) forma objętości dla rozmaitości zadanych przez $\{f = 0\}$;
(17) interpretacja całki powierzchniowej jako strumienia pola wektorowego przez powierzchnię;
(18) wzór Greena $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega u \Delta v + \int_{\partial\Omega} \cdots$;

(19) obliczanie objętości figur przez całkę po brzegu;

2.3. **Elementy geometrii różniczkowej.**

(1) gwiazdka Hodge'a;
(2) zapis rotacji, dywergencji, gradientu i laplasjanu przy użyciu d i $*$;
(3) obliczanie laplasjanu w różnych, ciekawych układach współrzędnych;
(4) defincja grup kohomologii de Rhama; bezpośrednie obliczenie dla S^1 i $\mathbb{R}^2$ bez kilku punktów;
(5) ciąg Meyera–Vietorisa (bez dowodu);
(6) dualność Poincarégo ($H^k(M) \simeq H^{n-k}(M)$ dla zwartej, zorientowanej, gładkiej rozmaitości n wymiarowej bez brzegu) (bez dowodu);
(7) jawne wyliczenie $H^0(M)$;
(8) homotopijna niezmienniczość grup kohomologii (bez dowodu);
(9) wyliczenie grup kohomologii dla prostych rozmaitości $S^n, \mathbb{C}P^n$;
(10) definicja indeksu przecięcia;
(11) niezmienniczość homotopijna indeksu przecięcia (bez dowodu);
(12) stopień odwzorowania;
(13) definicja kohomologiczna stopnia odwzorowania;
(14) homotopijna niezmienniczość stopnia odwzorowania;
(15) dowód zasadniczego twierdzenia algebry;
(16) indeks pola wektorowego wokół punktu osobliwego;