Kilka problemów otwartych.

Już dwa, w tym jeden ma część informatyczną.

28 kwietnia 2007

Maciej Borodzik

1. Obliczenie wyznacznika.

Problem 1. Rozważmy sobie ciąg wielomianów określony rekurencyjnie.

$$\phi_1(u) = 1, \quad \phi_2(u) = u$$
$$\phi_n(u) = u\phi_{n-1} - (u^2 - 3)\phi_{n-2}.$$

Nietrudno zauważyć, że $\deg \phi_{3k+1} = 3k$, $\deg \phi_{3k+2} = 3k + 1$ oraz $\deg \phi_{3k+3} = 3k$. Ponadto, co nie jest już takie oczywiste, ϕ_{3k+3} jest liniowo zależny od wielomianów ϕ_i dla i mniejszych stopni. Niech $\psi_{2k+1} = \phi_{3k+1}$ oraz $\psi_{2k+2} = \psi_{3k+2}$. Wtedy, dla dowolnego n, wielomiany $\psi_1, \dots, \psi_n$ tworzą bazę w przestrzeni wielomianów stopnia mniejszego, bądź równego $n - 1$.

Problem jest następujący. Policzyć

$$K_n = \det \begin{vmatrix} \psi_1(2) & \psi_2(2) & \dots & \psi_n(2) \\ \psi_1'(2) & \psi_2'(2) & \dots & \psi_n'(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_1^{(n-1)}(2) & \psi_2^{(n-1)}(2) & \dots & \psi_n^{(n-1)}(2) \end{vmatrix}$$

Interesujące jest zwłaszcza pokazanie, że $K_n \neq 0$. Eksperymenty numeryczne, to znaczy policzenie tego wyznacznika przez macierze, prowadzą do tego, że K_n ma bardzo ciekawy rozkład na czynniki pierwsze, sugerujący istnienie prostego wzoru na K_n.

Problem 2. Analogiczny problem dotyczy sytuacji, gdy $\phi_i(u)$ są zdefiniowane rekurencyjnie przez $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = u$, $\phi_n(u) = u\phi_{n-1} - \frac{u^3+au^2+1}{2u+a}\phi_{n-2}$. Określamy $\psi_{3k+i} = \phi_{4k+i}$ dla $i = 1, 2, 3$. Wtedy tak samo należy obliczyć wyznacznik K_n i pokazać, że jest różny od zera, jeśli tylko parametr a jest niezerowy.

Zastosowanie tego (na oko) prostego problemu prowadzi do głębokich wniosków w teorii krzywych algebraicznych w przestrzeni.

2. Teoria Morse'a dla węzłów

Rozważmy powierzchnię C w $\mathbb{C}^2$ zadaną przez równanie $f(x, y) = 0$. f jest wielomianem dwóch zmiennych zespolonych. Zakładamy, że C może mieć punkty osobliwe.

Rozpatrzmy sfery $S_r = \{||x||^2 + ||y||^2 = r^2\}$. Dla prawie wszystkich r poza skończoną liczbą przecięcie C z S_r jest gładką zwartą podrozmaitością L_r sfery trójwymiarowej, a więc węzłem lub splotem.

Problem ogólny: powiązać własności powierzchni C z własnościami L_r.

Jeśli C jest osobliwe w punkcie $(0, 0)$ a r dostatecznie małe, to wiadomo wszystko. Ponadto, jeśli R jest bardzo duże, to również można zidentyfikować L_R w terminach krzywej C. Zbadanie, jak zmienia się L_r gdy zmieniamy r (typ węzła powinien być stały na zbiorach otwartych), może doprowadzić do stwierdzeń, że powierzchnia C o pewnych własnościach może istnieć, albo nie może.

Problem 3. Napisać program komputerowy, który dla zadanego z góry wielomianu (być może wielomian musiałby być wpisywany w źródło, ale to nie szkodzi), rysuje węzeł L_r w $\mathbb{R}^3$ (przechodzimy ze sfery trójwymiarowej do $\mathbb{R}^3$ poprzez rzut stereograficzny $(x, y, z, u) \to \frac{1}{1-u}(x, y, z)$). Za pomocą klawiatury można byłoby zmieniać parametr r, ze względu na utrudnioną możliwość dostrzeżenia "najlepszego" punktu widzenia, wskazana byłaby możliwość obrotu rysunku za pomocą myszy oraz przesuwanie środka rzutu stereograficznego (stosowanie przekształcenia ortogonalnego $\mathbb{R}^4$).