Słaba zbieżność miar..

Maciej Borodzik

Lemat 1. *Niech X będzie zbiorem a $K_n : X \to \mathbb{R}$ rodziną funkcji rzeczywistych ograniczonych na X oraz*

$$I_n = \inf_{x\in X} K_n(x), \quad S_n = \sup_{x\in X} K_n(x).$$

Załóżmy, że istnieje taka funkcja rzeczywista $K : X \to \mathbb{R}$, że $\forall x \in X\ K_n(x) \to K(x)$ (zbieżność punktowa). Niech

$$I = \inf_{x\in X} K(x), \quad S = \sup_{x\in X} K(x).$$

***Wtedy** zachodzi*

$$\limsup I_n \leq I, \quad \liminf S_n \geq S.$$

Proof. Zamiana K_n na $-K_n$ prowadzi do tego, że wystarczy rozważyć przypadek inf. Z definicji I wynika, że istnieje taki ciąg $x_m \in X$, że

$$K(x_m) < I + \frac{1}{2m}.$$

Dla każdego m istnieje takie n_m, że

$$|K_n(y_m) - K(y_m)| < \frac{1}{2m}, \quad \text{dla } n \geq n_m, \text{ bo } K_n \to K \text{ punktowo.}$$

Stąd wynika, że $K_n(y_m) < I + \frac{1}{m}$ dla dostatecznie dużych n. A zatem $I_n \leq I + \frac{1}{m}$. A co za tym idzie

$$\limsup I_n \leq I + \frac{1}{m}.$$

Wobec dowolności m otrzymujemy tezę. □

Uwaga 1. Nie możemy wnioskować, że $\lim I_n$ istnieje. Istotnie, weźmy funkcję $f(x) = \mathcal{I}_{[0,1]}$ (funkcja charakterystyczna odcinka $[0,1]$) Niech $X = \mathbb{R}$, $K_{2n}(x) = 2f(x-2n)$, $K_{2n+1}(x) = f(x-2n-1)$. Wtedy $K_n \to 0$ punktowo, ale $I_{2n} = 2$, $I_{2n+1} = 1$.

Stwierdzenie 1. *Niech Ω będzie przestrzenią topologiczną a μ, μ_n będą borelowskimi miarami dodatnimi i skończonymi na Ω. Następujące warunki są równoważne*

W1 *Dla każdego zbioru otwartego U zachodzi*

$$\lim \inf_{n\to\infty} \mu_n(U) \geq \mu(U),$$

oraz dla każdego zbioru domkniętego B mamy

$$\lim \sup_{n\to\infty} \mu_n(B) \geq \mu(N).$$

W2 *Dla dowolnego zbioru borelowskiego C, takiego, że $\mu(\partial C) = 0$ (miara brzegu) zachodzi*

$$\lim \mu_n(C) = \mu(C)$$

W3 *Dla dowolnej funkcji ciągłej i ograniczonej na Ω mamy*

$$\lim \int_\Omega f\, d\mu_n = \int_\Omega f\, d\mu.$$

Dowód. Implikacja $W2 \to W3$ była pokazana na ćwiczeniach. Dla pokazania $W3 \to W1$ wykorzystamy Lemat 1. Mianowicie, przypuśćmy, że U jest zbiorem otwartym. Niech F_U będzie zbiorem funkcji ciągłych o wartościach w $[0,1]$ znikających poza U. Jest oczywiste, że

$$\mu_n(U) = \sup_{f\in F_U} \int_\Omega f\, d\mu_n,$$

oraz analogicznie dla $\mu(U)$. Istotnie, miara zbioru to całka z funkcji stale równej jeden. My przybliżamy funkcję charakterystyczną zbioru U funkcjami ciągłymi na U od dołu.

Stosujemy lemat biorąc F_U za przestrzeń X, $K_n(f) = \int f\, d\mu_n$, $K(f) = \int f\, d\mu$.

Analogicznie, biorąc za F_B zbiór funkcji ciągłych o wartościach w $[0,1]$ równych 1 na B pokazujemy drugą część warunku **W1**.

Z **W1** natychmiast wynika **W2**. Załóżmy, że C jest otwarty, oraz $\mu(\partial C) = 0$. Wtedy

$$\limsup \mu_n(C) + \limsup \mu_n(\partial C) \leq \mu(\overline{C}) = \mu(C)$$
$$\liminf \mu_n(C) \geq \mu(C).$$

Stąd dostajemy $\limsup \mu_n(C) = \liminf \mu_n(C) = \mu(C)$. $\square$

Definicja 1. *O ciągu miar spełniających jeden z trzech powyższych warunków powiemy, że jest* słabo zbieżny *do miary* μ.

Uwaga 2. W warunku **W1** nie można opuścić czerwonych napisów. Istotnie, weźmy sobie dwa ciągi miar na $\mathbb{R}$

$$\mu_n^1 = \frac{1}{2n} e^{-n|x|} dx$$
$$\mu_n^2 = \begin{cases} \frac{3}{4n} e^{-nx} dx, & \textit{gdy } x \geq 0 \\ \frac{1}{4n} e^{nx} dx, & \textit{gdy } x < 0 \end{cases}$$

Wtedy oba te ciągi zbiegają do miary Diraca δ_0. Niech $U = (0, \infty)$. Wtedy $\mu_n^1(U) = \frac{1}{2}$ a $\mu_n^2(U) = \frac{3}{4}$. Wystarczy teraz przepleść między sobą te ciągi, wtedy $\mu_n(U)$ nie będzie miał granicy.