Prawa elektromagnetyzmu i równania Maxwella

wg. Resnick, Holliday t. 2, Dubrovin Novikov Fomenko „Contemporary Geometry"

Maciej Borodzik

1. Prawo Coulomba i prawo Gaussa

Prawo Coulomba, znane ze szkoły średniej, mówi, że na dwa ładunki elektryczne w próżni q_0 i q oddalone od siebie o r działa siła

$$F_{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 \cdot q_1}{r^2},$$

gdzie $\varepsilon_0 \simeq 8.854187818 \cdot 10^{-12} C^2/(N \cdot m^2)$ jest nazywane *przenikalnością elektryczną próżni*. Można z dobrym przybliżeniem przyjąć, że $1/4\pi\varepsilon_0 = 9.0 \cdot 10^9 \cdot N \cdot m^2/C^2$.

Prawo Coulomba można przeformułować następująco

Prawo Coulomba. Ładunek punktowy q_0 w próżni wytwarza pole elektromagnetyczne $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{r_2} \cdot \frac{\vec{r}}{||r||}$. Pole to działa na inny ładunek q siłą $F = Eq$.

W przypadku, gdy mamy do czynienia nie z ładunkiem punktowym a z ładunkiem rozmytym, określonym na zbiorze $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ z gęstością ładunku ρ (ρ jest to pewną miarą na Ω, której atomy odpowiadają ładunkom punktowym), to pole elektryczne w punkcie $y \in \mathbb{R}^3$ zadane jest wzorem

$$E(y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Omega \frac{x-y}{||x-y||^3} d\rho(x). \tag{1}$$

Przykład 1. Rozważmy okrąg $S = \{x^2 + y^2 = r^2, z = 0\}$ o ładunku q rozmieszczonym jednorodnie. W punkcie $(0, 0, z)$ pole elektryczne generowane przez ten okrąg jest skierowane w kierunku osi Oz i dane wzorem

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{q}{2\pi r}\frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} dS.$$

Tutaj gęstość $\rho = \frac{q}{2\pi r} dS$. Ponieważ funkcja podcałkowa jest stała na okręgu, wynik jest po prostu miarą okręgu pomnożoną przez funkcję podcałkową, czyli

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qz}{(z^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Poniższe pojęcie ma (stosunkowo) niewielkie znaczenie dla rozwiązywania zadań, jest jednak bardzo istotne w sformułowaniu praw fizyki.

Definicja 2. *Strumieniem pola elektrycznego* przez powierzchnię zamkniętą S nazwiemy całkę

$$\int_S \vec{E} = \int_S E_x \, dy \wedge dz + E_y \, dz \wedge dx + E_z \, dx \wedge dy.$$

Na mocy twierdzenia Stokesa, jeśli S ogranicza zbiór B, to strumień pola jest równy

$$\int_B \operatorname{div} E.$$

Obliczmy teraz dywergencję pola (1). Wiemy, że

$$\operatorname{div}_y \frac{x-y}{||x-y||^3} = 0$$

jeśli tylko $x \neq y$. Oznacza to, że dywergencja pola jest skoncentrowana na zbiorze Ω. Jeśli pole E jest wytwarzane przez ładunek punktowy wielkości q, to strumień pola wzdłuż małej sfery jest w otoczeniu q jest równy $\frac{q}{\varepsilon_0}$. Argumenty z teorii miary pozwalają stwierdzić, że $\operatorname{div} E = 4\pi\rho$ (w sensie dystrybucyjnym: jeśli ρ jest gęstością ładunku punktowego, to $\operatorname{div} E = 4\pi\delta_y$), co po wycałkowaniu po B prowadzi do

Prawo Gaussa. Strumień pola elektrycznego przez powierzchnię zamkniętą S równy jest całkowitemu ładunkowi elektrycznemu zawartemu wewnątrz tej powierzchi. Zapisując wzorem

$$\int_S \vec{E} = \int_B \rho.$$

Prawo Gaussa w postaci infinitezymalnej ma postać

$$\operatorname{div} E(y) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(y). \tag{2}$$

Z prawa Gaussa płynie następujący wniosek

Wniosek 3. W zamkniętym przewodniku izolowanym (np. w metalowej kuli) ładunek skupia się na brzegu przewodnika.

Dowód. Rozpatrzmy przewodnik B z brzegiem S i weźmy dowolną powierzchnię zamkniętą K zawartą całkowicie we wnętrzu B. Jako że materiał jest przewodnikiem, w stanie równowagi elektrostatycznej strumień pola przez K jest równy zero. Założenie, że gęstość ładunku w jakimś punkcie we wnętrzu B jest dodatnia prowadzi więc do sprzeczności. □

2. Prawo Ampère'a i indukcja

Niech B będzie polem magnetycznym w próżni. Jeśli ładunek q porusza się w tym polu z prędkością v, działa na niego siła

$$F_{magn} = qv \times B.$$

Pole magnetyczne wywołuje również przepływ prądu. Doświadczalnie stwierdzono

Prawo Ampère'a. W przypadku braku pola elektrycznego, pole magnetyczne B wywołuje przepływ prądu i równy

$$\int_l B = \mu_0 i, \tag{3}$$

gdzie l jest krzywą zamkniętą, i prądem przepływającym przez powierzchnię S ograniczającą l a $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} T \cdot m/A$ jest nazwane przenikalnością dielektryczną próżni. T oznaczają teslę (jednostkę indukcji magnetycznej), zaś A ampery.

Jeśli $B = (B_x, B_y, B_z)$, to całka w lewej stronie (3) jest równa

$$\int_l B_x dx + B_y dy + B_z dz.$$

Stosując wzór Stokesa uzyskujemy $\int_l B = \int_S \operatorname{rot} B$.

Z drugiej strony prąd przepływający przez powierzchnię S jest równy całce po S z wektora natężenia prądu. W tym miejscu przypominam, że prąd jest to przepływ ładunków. Prąd przez powierzchnię to to samo, co strumień natężenia prądu przez powierzchnię. a więc $i = \int_S J$. Wstawiając to do (3), wobec dowolności S mamy

$$\operatorname{rot} B = \mu_0 J.$$

Prawo Ampère'a mówi o indukcji magnetycznej. Jeśli dane są dwa przewodniki i w jednym płynie prąd I_1, wytwarza on pole pewne pole magnetyczne B_1. To pole wytwarza w drugim przewodniku prąd I_2, który jest indukowany z prądu I_1.

Powyższe wzory obowiązują, gdy pole elektryczne nie istnieje, lub jest stałe w czasie. Zmiana pola elektrycznego indukuje pole magnetyczne (fakt został zapostulowany przez symetrię równań Maxwella i potwierdzony doświadczalnie później). Wzór (3) uogólnia się do

$$\int_l B = \mu_0 (i + \varepsilon_0 \frac{d\Psi_E}{dt}),$$

gdzie Ψ_E jest strumieniem pola elektrycznego przez powierzchnię ograniczaną przez l. Równanie Maxwella w ogólności przyjmuje postać

$$\operatorname{rot} B = \mu_0 J + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}. \tag{4}$$

Można też sformułować infinitezymalną wersję prawa Ampère'a. Mianowicie zachodzi

Prawo Biota–Savarta. Prąd o natężeniu i płynący przez odcinek dl w punkcie oddalonym o $\vec{r}$ od l pole magnetyczne równe

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \times \vec{r}}{||r||^3}.$$

Prawo Ampère'a uzyskujemy po wycałkowaniu obu stron po dl. Zauważamy podobieństwo do prawa Gaussa: pole magnetyczne rozchodzi się tak jak $1/r^2$.

Przypuśćmy, że istniałby odosobniony ładunek magnetyczny. Zgodnie z prawem Biota–Savarta wytwarzałby on pole magnetyczne zachowujące się w tak jak $\vec{r}/||r||^3$.

eśli zastosować do strumienia pola magnetycznego tę samą procedurę, co do strumienia pola elektrycznego, uzyskamy, że dywergencja pola B jest równa gęstości ładunku magnetycznego w danym punkcie. Jako, że nie istnieje monopol magnetyczny, gęstość ta jest zerowa. Otrzymujemy zatem kolejne równanie Maxwella

$$\operatorname{div} B = 0. \tag{5}$$

To równanie jest prawdziwe przy założeniu, że nie istnieje monopol magnetyczny.

2.1. **Zastosowania.** Po pierwsze, prąd płynący przez przewodnik indukuje pole magnetyczne. A więc powoduje przesuwanie się magnesu. Dobrze umieszczony przewodnik (zwoje drutu) i magnes może sprawić, że magnesy zaczną się obracać. Na tej zasadzie działa silnik elektryczny.

Jako drugie zastosowanie można wymienić zamki otwierane zdalnie (np. w domofonach), gdzie włączone napięcie powoduje zwolnienie blokady przed otwarciem drzwi.

Trzecim z milionów zastosowań są japońskie superszybkie pociągi. Otóż prąd płynący przez szynę może wytwarzać poduszkę magnetyczną tak, że pociąg nie jedzie po szynach (eliminacja tarcia) a sunie kilka – kilkadziesiąt centymetrów ponad nimi. Ponadto taki pociąg może być również magnetycznie napędzany.

3. Zasada indukcji Faradaya

W roku 1831 M. Faraday i J. Henry niezależnie od siebie sprawdzili, że zbliżanie magnesu do cewki w obwodzie zamkniętym powoduje, że przez obwód przepływa prąd. Doświadczalnie stwierdzono, że jeśli krzywą zamkniętą l ograniczony powierzchnią S i Φ_B oznacza strumień pola przez S, to siła elektromotoryczna $\mathcal{E}$ indukowana w tym obwodzie wynosi $-\frac{d\Phi_B}{dt}$. Znak minus oznacza, że indukowany przepływ ładunków przeciwdziała zmianie pola magnetycznego.

Siła elektromotoryczna SEM (ma wymiar J/C, lub równoważnie V) jest siłą, która wykonuje pracę nad ładunkiem elektrycznym. Siła w obwodzie zamkniętym l wykonuje pracę nad ładunkiem q równą $\mathcal{E}q$ (przy jednokrotnym obiegu obwodu). Łatwo się przekonać, że ta definicja odnosi się np. do baterii: jeśli bateria podłączona do obwodu zamkniętego SEM U (np. 12V) i przez obwód zamknięty płynie prąd $I = 2A$, bateria taka ma moc $U \cdot I$ a więc w jednostce czasu t wykona pracę $U \cdot I \cdot t$. Z drugiej strony I jest prędkością przepływu ładunków, czyli $I = q/t$, jeśli jest stały w czasie. A więc istotnie praca wynosi $U \cdot q$ i jest to praca, którą bateria wykonuje nad ładunkiem.

W dowolnym punkcie obwodu siła elektryczna działająca na ładunek q wynosi $Eqdl$, gdzie E jest natężeniem pola elektrycznego. A zatem $\mathcal{E} = \int Edl$. Stosując twierdzenie Stokesa uzyskujemy

Prawo Faradaya (wersja Maxwella)**.** Zmiana pole magnetycznego B indukuje pole elektryczne E zgodnie ze wzorem

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}. \tag{6}$$

3.1. **Zastosowania.** Prądnica służy do wytwarzania prądu z ruchu. Transformatory przenoszą pole zmienne o zadanym napięciu na pole zmienne o innym napięciu. Transformatory stanowią integralną część prostowników i zasilaczy. Podobnie zastosowaniem jest radio.

4. Podsumowanie równań Maxwella

Równania Maxwella przyjmują następującą postać

$$\operatorname{div} E = \frac{1}{\varepsilon_0} q \qquad \text{Prawo Gaussa} \tag{7}$$

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad \text{Prawo Faradaya} \tag{8}$$

$$\operatorname{div} B = 0 \qquad \text{brak monopoli magnetycznych} \tag{9}$$

$$\operatorname{rot} B = \mu_0 J + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \qquad \text{prawo Ampère'a.} \tag{10}$$

Przypomnijmy teraz, że $\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$. Jeśli zróżniczkujemy pierwsze równanie po t i dodamy do obu stron dywergencję czwartego rówania, wszystkie wyrazy z E i B się poskracają. Uzyskamy w ten sposób *zasadę zachowania ładunku*

$$\operatorname{div} J + \frac{dq}{dt} = 0. \tag{11}$$

Interpretacja tego równania jest bardzo prosta: prąd jest to wypłynięcie ładunku. $\operatorname{div} J$ mówi, ile ładunku wypływa. Można też scałkować (11) po kuli i stwierdzić, że $\int \operatorname{div} J$ to strumień prądu przez brzeg kuli, a $\int q'$ to zmiana całkowitego ładunku zawartego w kuli.

4.1. **Siła Lorentza.** Jeśli mamy dany ładunek q, który porusza się z prędkością v w polu elektrycznym E i magnetycznym B, to całkowita siła, która działa na niego wynosi

$$F = qE + qv \times B.$$

Czym jest qv? Otóż jest to wektor mówiący o przepływie danego ładunku. Inaczej mówiąc $qv = J$. Czyli siła Lorentza działająca na poruszający się ładunek wynosi

$$F = qE + J \times B.$$

4.2. **Pola swobodne.** O polach swobodnych mówimy, gdy $q = 0$ i $J = 0$. W takim przypadku przypomnijmy, że $\operatorname{rot}\operatorname{rot} v = -\Delta v + \operatorname{grad}\operatorname{div} v$, gdzie laplasjan Δ działa po współrzędnych. A zatem $\operatorname{rot}\operatorname{rot} E = -\Delta E$, bo $\operatorname{div} E =$

0 gdy nie ma ładunku elektrycznego. Z drugiej strony, $\operatorname{rot} E = -\operatorname{rot}\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot} B = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$. A więc uzyskujemy

$$\Delta E = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} E. \tag{12}$$

Czyli, przy braku ładunku i prądu, natężenie pola E spełnia jednorodne równanie falowe. Identyczne równanie spełnia B, choć obie te wielkości nie są niezależne. Wielkość $(\mu_0\varepsilon_0)^{1/2}$ oznacza prędkość rozchodzenia się fali. Nietrudno zauważyć, że jest to prędkość światła w próżni.

4.3. **Potencjał i cechowanie.** Przyjmijmy na chwilę, że nie ma pól magnetycznych. Wtedy $\operatorname{rot} E = 0$. Stąd, przynajmniej lokalnie na $\mathbb{R}^3$ istnieje taka funkcja skalarna ϕ, że $E = \operatorname{grad}\phi$. Tę funkcję nazywamy *potencjałem elektrycznym* lub *potencjałem skalarnym*.

Potencjał nie jest określony jednoznacznie. Możemy dowolnie wybrać sobie stałą. Jednoznacznie określona jest *różnica potencjałów* między dwoma punktami w przestrzeni. Mierzy się ją oczywiście w woltach i powszechnie nazywa napięciem. Zgodnie z definicją, $\phi(y) - \phi(x) = \int_x^y E dl$.

Jeśli istnieje pole B sytuacja trochę się komplikuje. Ale z faktu, że $\operatorname{div} B = 0$ wnosimy, że istnieje takie pole A (nazywane *potencjałem wektorowym*), że $B = \operatorname{rot} A$. Wtedy potencjał ϕ określamy tak, że $\operatorname{grad}\phi = E + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot} A$.

Potencjał A nie jest wyznaczony jednoznacznie. Istotnie, możemy do A dodać gradient ∇F i wtedy B się nie zmieni. Przekształcenie $A \to A + \nabla F$ nazywamy *przekształceniem cechowania*. Jeśli przyjąć, że pole magnetyczne nie zmienia się w czasie (np. rozpatrujemy potencjał dla nieruchomego magnesu, to A spełnia.

$$\operatorname{grad}\operatorname{div} A - \Delta A = \mu_0 J.$$

Możemy teraz *wybrać cechowanie* (poprzez dodanie do A pewnej funkcji) i przyjąć, że $\operatorname{div} A = 0$. Wtedy A będzie spełniało po współrzędnych równanie Poissona $\Delta A_i = \mu_0 J_i$.

W ogólności równania Maxwella w terminach potencjału redukują się do układu dwóch równań

$$\begin{aligned} \Delta\phi - \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div} A &= -\rho. \\ \Delta A - \frac{1}{c^2} - \operatorname{grad}(\operatorname{div} A + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}) &= J. \end{aligned} \tag{13}$$

Dwa równania $\operatorname{div} B = 0$ i $\operatorname{rot} E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0$ wynikają bezpośrednio z definicji ϕ i A.

Równania (13) są niezmiennicze ze względu na przekształcenie cechowania, które w ogólności przyjmuje postać

$$\begin{aligned} A &\to A' = A + \operatorname{grad} F \\ \phi &\to \phi' = \phi - \frac{\partial F}{\partial t} \end{aligned} \tag{14}$$

Wybierając cechowanie tak, żeby $\operatorname{div} A + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial}t = 0$ (cechowanie Lorentza) uzyskujemy $\Delta\phi - c^2\phi''_{tt} = -\rho$ i $\Delta A - c^2 A''_{tt} = J$, a więc równania się odprzęgają (oczywiście w sensie fizycznym), bo trzymamy warunek cechowania.

Ale i warunek cechowanie Lorentza nie jest do końca jednoznaczny. Istotnie, jeśli F spełnia równanie falowe $\Delta F = c^2 F''_{tt}$, to zastosowanie transformacji cechowania nie zmienia warunku Lorentza.

Inny możliwy wybór cechowania, *cechowanie Coulomba* zakłada, że $\operatorname{div} A = 0$. Wtedy ϕ spełnia $\Delta\phi = \rho$, co daje się łatwo rozwiązać przez całkę Poissona.

5. Forma natężenia pola

W tym rozdziale będziemy zakładać, że prędkość światła, przenikalność elektryczna próżni, ładunek i masa elektronu są równe 1.

Dla pola elektrycznego E i magnetycznego F określamy formę (tensor) natężenia pola wzorem

$$F = \sum_{i=1}^{3} E_i dx_0 \wedge dx_i + B_1 dx_2 \wedge dx_3 + B_2 dx_3 \wedge dx_1 + B_3 dx_1 \wedge dx_2,$$

gdzie x_0 oznacza teraz współrzędną czasową. Wprowadźmy w $\mathbb{R}^4$ iloczyn skalarny wzorem

$$(x_0, x_i) \cdot (y_0, y_i) = -x_0 y_0 + x_i \cdot y_i,$$

gdzie $x_i \cdot y_i$ jest standardowym iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^3$. Tak wybrany iloczyn, który nie jest dodatnio określony, nazywamy *metryką Minkowskiego*. Ta „metryka” jest — zgodnie ze szczególną teorią względności — zachowana przez przekształcenia, które odpowiadają zmianom punktu odniesienia.

Zauważmy najpierw, że

$$dF = dx_0 \wedge \left(\left(-\frac{\partial E_1}{\partial x_2} + \frac{\partial E_2}{\partial x_1} + \frac{\partial B_3}{\partial x_0} \right) dx_1 \wedge dx_2 + \dots \right) + \\ + dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \operatorname{div} B.$$

A zatem $dF = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{rot} E + \frac{\partial B}{\partial x_0} = 0$ i $\operatorname{div} B = 0$.

Z drugiej strony, obserwujemy, że w metryce Minkowskiego mamy $* dx_0 \wedge dx_1 = -dx_2 \wedge dx_3$ i tak dalej. A zatem

$$* F = -\sum_{i=1}^{3} B_i dx_0 \wedge dx_i + E_1 dx_2 \wedge dx_3 + E_2 dx_3 \wedge dx_1 + E_3 dx_1 \wedge dx_3.$$

Stąd wyliczamy, że

$$d * F = dx_0 \wedge \left(\left(\frac{\partial B_1}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_1} + \frac{\partial E_3}{\partial x_0} \right) dx_1 \wedge dx_2 + \dots \right) + \\ + dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \operatorname{div} E.$$

W szczególności, jeśli oznaczymy sobie $j = qdx_0 + J_1dx_1 + J_2dx_2 + J_3dx_3$, to równania $\operatorname{div} E = q$ i $\operatorname{rot} B - \frac{\partial E}{\partial x_0} = J$ przyjmą zwartą postać

$$* d * F = j.$$

Zasada zachowania ładunku, która teraz mówi, że $* d * j = 0$ wynika z faktu, że jeśli $\delta = * d *$, to $\delta^2 = 0$.

5.1. **Pola swobodne. Lagranżjan.** Rozpatrzmy najpierw ogólną sytuację. Dana jest zwarta zorientowana rozmaitość różniczkowa M wraz z pewną metryką Riemanna, czyli iloczynem skalarnym wektorów v_i, v_j w przestrzeni stycznej. Iloczyn skalarny k formy przez k formę określamy w bardzo prosty sposób. Mianowicie, jeśli $x_0 \in M$ a $v_1, \ldots, v_n$ stanowią zorientowaną bazę ortonormalną przestrzeni $T_{x_0}M$, to formy $\phi_1, \ldots, \phi_n$, które stanowią bazę dualną do $v_1, \ldots, v_n$ będą zorientowaną bazą ortonormalną w $T^*_{x_0}M$. Teraz będziemy żądać, żeby wektory $\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}$ dla $i_1 < \cdots < i_k$ stanowiły bazę ortonormalną w $\Lambda^k T^*_{x_0}M$.

Możemy zadać operację $*$. Weźmy sobie $k-$formę η. Dla dowolnej $n-k$ formy ω mamy $\omega \wedge \eta = a(\omega) \cdot d_vol$, gdzie a jest skalarem. Przyporządkowanie $\omega \to a(\omega)$ jest liniowe. A więc jest iloczynem skalarnym ω przez jakąś $n-k$–formę η'. Wtedy $\eta' = * \eta$ z definicji $*$.

Przykład 4. Ustalmy $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ Niech $\eta_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ będzie formą w $\mathbb{R}^n$ zapisaną w standardowym układzie współrzędnych. $(n-k)$–formy w $\mathbb{R}^n$ są rozpięte przez $\omega_J = dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{n-k}}$, $J = \{j_1, \ldots, j_{n-k}\}$. Niech $I' = \{1, \ldots, n\} \setminus I$. Wtedy $\omega_J \wedge \eta_I$ jest równe 0 gdy $J \neq I'$; natomiast $\omega_{I'} \wedge \eta_I$ jest równe znakowi $s_{I,I'}$ permutacji $\{1, \ldots, n\} \to I \cup I'$. A zatem, z definicji, $* \eta_I$ jest prostopadłe do wszystkich ω_J poza $\omega_{I'}$. Czyli $* \eta_I = c\omega_{I'}$. Ale musimy mieć

$$(\omega_{I'}, * \eta_I) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \omega_{I'} \wedge \eta_I.$$

Z tego warunku uzyskujemy, że $c = s_{I,I'}$.

Przykład 5. Weźmy teraz $\mathbb{R}^3$ i współrzędne biegunowe $x = r \cos\phi \cos\theta$, $y = r \cos\phi \sin\theta$, $z = r \sin\phi$, albo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta} &= -r\cos\phi\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\phi\cos\theta\frac{\partial}{\partial y} \\
\frac{\partial}{\partial\phi} &= -r\sin\phi\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} - r\sin\phi\sin\theta\frac{\partial}{\partial y} + r\cos\phi\frac{\partial}{\partial z} \\
\frac{\partial}{\partial r} &= \cos\phi\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \cos\phi\sin\theta\frac{\partial}{\partial y} + \sin\phi\frac{\partial}{\partial z},
\end{aligned}$$

gdzie $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ oznaczają wersory styczne. Tworzą one ortonormalny układ współrzędnych.

Z powyższego wzoru wynika, że wektory styczne $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial\phi}$ i $\frac{\partial}{\partial\theta}$ są do siebie wzajemnie prostopadłe. Przy tym pierwszy z nich ma długość 1, drugi r, trzeci $r\cos\phi$. To oznacza, że wektory $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}$ i $\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\theta}$ tworzą bazę ortonormalną w przestrzeni stycznej. Stąd wynika, że formy $\omega_1 = dr$, $\omega_2 = rd\phi$ i

$\omega_3 = r\cos\phi\, d\theta$ stanowią bazę ortonormalną przestrzeni kostycznej. A zatem, na mocy poprzedniego przykładu $*\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_3$, $*\omega_2 = \omega_3 \wedge \omega_1$, $*\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_2$. A więc

$$\begin{aligned} *\, dr &= r^2 \cos\phi\, d\phi \wedge d\theta, \\ *\, d\phi &= \cos\phi\, d\theta \wedge dr, \\ *\, d\theta &= \frac{1}{\cos\phi}\, dr \wedge d\phi \\ *\, dr \wedge d\phi \wedge d\theta &= \frac{1}{r^2 \cos\phi}. \end{aligned}$$

Powyższe wzory są bardzo sugestywne i łatwo się przenoszą na wyższe wymiary.

Przykład 6. Skoro laplasjan zapisuje sie jako $*\, d * df$ popatrzmy, jak wygląda laplasjan we spółrzędnych biegunowych. Mamy

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta.$$

Czyli

$$*\, df = r^2 \cos\phi \frac{\partial f}{\partial r} d\phi \wedge d\theta + \cos\phi \frac{\partial f}{\partial \phi} d\theta \wedge dr + \frac{1}{\cos\phi} \frac{\partial f}{\partial \theta} dr \wedge d\phi.$$

Czyli

$$d * df = \left(r^2 \cos\phi \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + 2r\cos\phi \frac{\partial f}{\partial r} + \cos\phi \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} - \sin\phi \frac{\partial f}{\partial \phi} + \frac{1}{\cos\phi} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right) dr \wedge d\phi \wedge d\theta.$$

Ostatecznie

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} - \operatorname{tg}\phi \frac{\partial f}{\partial \phi} + \frac{1}{\cos^2\phi} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right).$$

Ten sposób wyprowadzenia laplasjanu jest o wiele prostszy od bezpośredniego podstawiania. Można go bez żadnych trudności zastosować do wyższych wymiarów.

Przykład 7. Zobaczmy co się dzieje z gwiazdką, gdy zadana jest „metryka" o sygnaturze $(-,+,+,+)$, która nie jest dodatnio określona na $\mathbb{R}^4$. Niech v_0, v_1, v_2, v_3 będą wektorami ortonormalnymi, tj. $||v_0|| = -1$, $||v_1|| = ||v_2|| = ||v_3|| = 1$ (oznaczenie $||\cdot||$ na „długość" wektora jest tutaj drobnym nadużyciem). Wtedy wektory $w_0 = iv_0$, $w_j = v_j$ dla $j = 1,2,3$ tworzą bazę ortonormalną $\mathbb{R}^4$. Znowu, dokonujemy pewnego nadużycia, bo wektor w_0 nie jest rzeczywisty. Niech η_μ będzie bazą dualną do w_μ, zaś ω_μ bazą dualną do v_μ. Naturalnie $\eta_0 = -i\omega_0$, poza tym η i ω się pokrywają. Aby gwiazdka była rzeczywista, musimy przyjąć, że $\omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = i\eta_0 \wedge \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_3$ jest formą objętości. Mamy

$$
\begin{aligned}
*\eta_0 \wedge \eta_1 &= -i\eta_2 \wedge \eta_3 & \qquad *\eta_2 \wedge \eta_3 &= -i\eta_0 \wedge \eta_1 \\
*\eta_0 \wedge \eta_2 &= i\eta_1 \wedge \eta_3 & *\eta_1 \wedge \eta_3 &= i\eta_0 \wedge \eta_2 \\
*\eta_0 \wedge \eta_3 &= -i\eta_1 \wedge \eta_2 & *\eta_1 \wedge \eta_2 &= -i\eta_0 \wedge \eta_3.
\end{aligned}
$$

Dzięki zależności, jaka wiąże ω i η uzyskujemy

$$
\begin{aligned}
*\omega_0 \wedge \omega_1 &= \omega_2 \wedge \omega_3 & \qquad *\omega_2 \wedge \omega_3 &= -\omega_0 \wedge \omega_1 \\
*\omega_0 \wedge \omega_2 &= -\omega_1 \wedge \omega_3 & *\omega_1 \wedge \omega_3 &= \omega_0 \wedge \omega_2 \\
*\omega_0 \wedge \omega_3 &= \omega_1 \wedge \omega_2 & *\omega_1 \wedge \omega_2 &= -\omega_0 \wedge \omega_3.
\end{aligned}
$$

Oczywiście, ten przykład to jest raczej agitacja, niż ścisły dowód.

Określamy iloczyn skalarny w przestrzeni wszystkich $k-$form na M wzorem

$$(\omega_1, \omega_2) \stackrel{def}{=} \int_M (\omega_1 \cdot \omega_2) dvol_M = \int_M \omega_1 \wedge *\omega_2,$$

gdzie całkujemy względem formy objętości określonej przez metrykę na M. Mamy $(\omega_1, \omega_2) = (*\omega_1, *\omega_2) = (\omega_2, \omega_1)$(dlaczego?). Ponadto zachodzi

$$(\omega_1, d\omega_2) = \pm(*\, d *\omega_1, \omega_2).$$

Istotnie, z definicji $(\omega_1, d\omega_2) = \int \omega_1 \wedge * \,d\omega_2 = \int *\,\omega_1 \wedge d\omega_2$. Ale $*\,\omega_1 \wedge d\omega_2 = d(*\,\omega_1 \wedge \omega_2) \pm d *\omega_1 \wedge \omega_2$. Całkując uzyskujemy tezę.

Czyli $\delta = *\,d\,*$ jest operatorem sprzężonym do operatora d. Rozpatrzmy teraz przestrzeń afiniczną A form ω reprezentujących tę samą klasę kohomologii. To znaczy $\forall \omega \in A$ zachodzi $d\omega = 0$ a ponadto $\forall \omega_1, \omega_2 \in A$ $\omega_1 - \omega_2 = d\eta$.

Lemat 8. Spośród wszystkich form ω z A najmniejszą normę ma forma taka, że $\delta\omega = 0$.

Dowód. Rozpatrzmy $D(\varepsilon) = ||\omega + \varepsilon d\eta||^2 - ||\omega||^2$. Jest to równe

$$\varepsilon \int *\,\omega \wedge d\eta + O(\varepsilon^2).$$

Ale $*\,\omega \wedge d\eta = d(*\,\omega \wedge \eta) \pm d *\omega \wedge \eta$. A więc część liniowa w $D(\varepsilon)$ jest równa

$$\pm \int d *\omega \wedge \eta = \pm(\eta, \delta\omega).$$

Czyli D może mieć ekstremum tylko wtedy, gdy $\delta\omega = 0$. Ale gdy $\delta\omega_1 = \delta\omega_2 = 0$ i $\omega_1, \omega_2 \in A$, to $\omega_1 - \omega_2 = d\eta$ i $*\,d *d\eta = 0$. A więc $(\eta, *\,d *d\eta) = 0$. To pokazuje, że $||d\eta||^2 = 0$, czyli $d\eta = 0$, skąd $\omega_1 = \omega_2$. Stąd D ma tylko jedno ekstremum. Jako, że D jest wypukłe i dodatnio określone, jest to minimum. $\square$

Wracając na nasze podwórko widzimy, że jeśli nie ma zewnętrznych prądów, czyli $\delta F = 0$, to dwa równania Maxwella wynikają z położenia warunku ekstremalnego

$$L = \int F \wedge *F$$

musi być minimalne. Istotnie, równania Eulera–Lagrange'a sprowadzą się do $\delta F = 0$.

Chcemy teraz włączyć działanie pola zewnętrznego, a więc umieścić J w lagranżjanie. Okazuje się, że właściwą metodą jest dodanie członu $\sum A_\mu J_\mu$ do lagranżjanu, gdzie $J = (q, j_1, j_2, j_3)$. Istotnie, mamy $\frac{\partial}{\partial A_\nu} \sum A_\mu J_\mu = J_\nu$. Ponadto $\frac{\partial}{\partial(\partial_\xi A_\nu)} \sum A_\mu J_\mu = 0$, bo dodawany człon nie zależy od pochodnej A. Wariacja lagranżjanu względem μ–tej składowej wektora A

$$\sum_{\nu=0}^{4} \frac{d}{\partial x_\nu} \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} - \frac{\partial L}{\partial A_\mu}.$$

Jest liniowa względem L i, jak zaagitowaliśmy, dla $L = F \wedge *F$ jest równa μ–tej składowej wektora δF. A więc dla lagranżjanu $L(A) = F \wedge *F + A \cdot J$ równanie Eulera–Lagrange'a przyjmują istotnie postać

$$\delta F = J.$$

Problem jest taki, że $L = F \wedge *F + A \cdot J$ zależy od wyboru cechowania. Istotnie, zamiana $A \to A' = A + df$ przeprowadza nam wyraz $A \cdot J$ w $A \cdot J + df \cdot J$. Aby to zrozumieć, musimy rozszyfrować symbol $A \cdot J$. Otóż jeśli, jak wyżej $A = \sum A_\mu dx_\mu$ zaś $J = \sum J_\mu dx\mu$, to przez $A \cdot J$ rozumieliśmy $\sum A_\mu J_\mu$, czyli iloczyn skalarny. Otóż w języku form różniczkowych mamy $A \cdot J = A \wedge *J$. W takim wypadku $df \cdot J = df \wedge *J$.

Lemat 9. Jeśli $d * J = 0$, to $\int_{\mathbb{R}^4} df \wedge *J = 0$.

Dowód. Rozpatrzmy formę $\omega = f \wedge *J$. Mamy $d\omega = df \wedge *J + f \wedge d*J = df \wedge *J$. Czyli $\int_{\mathbb{R}^4} df \wedge *J = \int_{\mathbb{R}^4} d\omega = 0$. □

Oczywiście $\mathbb{R}^4$ nie jest rozmaitością zwartą, więc milcząco zakładamy, że prąd J znika poza pewnym zwartym zbiorem. To założenie przewija się przez cały czas w elektrodynamice. Istotnie, jeśli F nie znika poza zbiorem zwartym, to $F \wedge *F$ może nie być całkowalna. Wtedy w ogóle nie ma sensu mówić o lagranżjanie.

W równaniu $d*J = 0$ (lub $\delta J = 0$) odczytujemy fizyczne równanie ciągłości. Co się jednak dzieje z lagranżjanem, gdy $d*J \neq 0$? Równanie Eulera–Lagrange'a ma postać $\delta F = J$. W wyprowadzeniu tego równania nigdzie nie korzystaliśmy z symetrii cechowania. Przyłóżmy $\delta = *d*$ do obu stron równania. Mamy $\delta^2 F = \delta J$. Jednak $\delta^2 = 0$. Jeżeli więc $\delta J \neq 0$, to równanie Eulera–Lagrange'a nie ma rozwiązań.