Twierdzenie Kreina–Milmanna. Gdzie używamy topologii?
Maciej Borodzik
według książki Simona *Convexity, an analytic point of view*

1. **Przestrzenie lokalnie wypukłe.** Przez przestrzeń X rozumiemy przestrzeń topologiczną liniową, to znaczy przestrzeń liniową z taką topologią, że dodawanie i mnożenie są ciągłe, jako odwzorowania $\mathbb{R} \times X \to X$ i $X \times X \to X$.

Definicja 1. Przestrzeń X nazwiemy *lokalnie wypukłą*, jeśli istnieje baza otoczeń 0 złożona ze zbiorów wypukłych.

Uwaga: twierdzenie Kołmogorowa mówi, że X ma topologię zadaną przez normę wtedy i tylko wtedy, gdy 0 ma ograniczone otoczenie wypukłe. W przestrzeni liniowej zbiór B jest *ograniczony*, jeśli dla każdego otoczenia U punktu 0 istnieje takie $\lambda > 0$, że $\lambda B \subset U$.

Naturalnie każda przestrzeń liniowa z topologią pochodzącą od normy jest lokalnie wypukła. Jeśli topologia nie pochodzi od normy, mogą dziać się dziwne rzeczy. Pokażemy, że przestrzeń z topologią słabej–* zbieżności jest lokalnie wypukła. Potrzebna nam będzie następująca definicja.

Definicja 2. Funkcja $\rho \colon X \to \mathbb{R}$ jest *seminormą* jeśli $\rho(x+y) \leq \rho(x)+\rho(y)$ oraz $\rho(tx) = |t|\rho(x)$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$ (nie tylko dla dodatnich).

Jeśli U jest otwartym i wypukłym otocznieniem zera, możemy zdefiniować funkcję

$$\rho_U(x) = (\sup\{\lambda\colon \lambda x \in U\})^{-1} \tag{1}$$

Nietrudno zauważyć, że ρ_U jest skończona (wynika z otwartości U). Ponadto, $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$, co wynika z wypukłości.

Lemat 1. Funkcja ρ_U jest seminormą wtedy i tylko wtedy, gdy U jest środkowosymetryczny, to znaczy $-U = U$.

Przykład 1. Przypuśćmy, że $f \colon X \to \mathbb{R}$ jest liniowe ciągłe. Wtedy funkcja $x \mapsto |f(x)|$ jest seminormą.

Teraz pokażemy związki lokalnej wypukłości z półnormami. Jest to treść Twierdzenia 3.17 w książce Simona.

Lemat 2. Niech X będzie przestrzenią topologiczną lokalnie wypukłą. Wtedy istnieje rodzina półnorm $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in J}$ (uwaga: J nie musi być przeliczalne!) takich, że

- (i) Zbiory $\{\rho_{\alpha_1} < \lambda_1, \dots, \rho_{\alpha_k} < \lambda_k\}$ gdzie $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in J$ zaś $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ stanowią bazę otoczeń wokół zera.
- (ii) Ciąg uogólniony x_β, $\beta \in B$ zbiega do x wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\alpha \in J$ zachodzi $\rho_\alpha(x_\beta) \to \rho_\alpha(x)$.

Ponadto, jeśli mamy przestrzeń liniową z rodziną półnorm taką, że zachodzi co najmniej jeden z powyższych warunków, to X jest lokalnie wypukła.

Dowód. Niech U_α, $\alpha \in J$ będzie bazą otoczeń w zerze. Przechodząc od U_α do $U_\alpha \cap -U_\alpha$, jeśli trzeba, możemy założyć, że U_α są środkowosymetryczne. Określamy ρ_α jako ρ_{U_α} przez (1). Warunek (i) wynika wprost z definicji. Co do warunku (ii), zauważmy, że jeśli $x_\beta - x \to 0$, to z ciągłości ρ_α wynika, iż $\rho_\alpha(x_\beta - x) \to 0$. Z drugiej strony, jeśli $\rho_\alpha(x_\beta - x)$ zbiega do zera dla każdego α, to $x_\beta - x$ znajduje się od pewnego miejsca w otoczeniu U_α. Skoro te otoczenia tworzą bazę otoczeń, wnioskujemy iż $x_\beta \to x$.

Z drugiej strony, jeśli X spełnia (i) lub (ii) i chcemy pokazać, że X jest lokalnie wypukła, to po pierwsze widzimy, iż (ii) implikuje (i)[1]. Z drugiej strony, zbiory zdefiniowane w punkcie (i) są w oczywisty sposób wypukłe, tak więc przestrzeń X jest lokalnie wypukła. □

Przykład 2. Przypuśćmy, że mamy przestrzeń liniową X i rodzinę funkcjonałów liniowych ciągłych Y. Możemy rozpatrywać topologię, w której bazy otoczeń są dane przez

$$\{x\colon |y_1(x)| < \lambda_1, \ldots, |y_k(x)| < \lambda_k\}.$$

(Funkcjonałów musi być dostatecznie dużo, żeby topologia była Hausdorffa, na przykład muszą rozdzielać punkty). W tej topologii X jest lokalnie wypukła. W szczególności, jeśli X jest przestrzenią Banacha, to X jest lokalnie wypukła w słabej topologii, zaś X^* jest również wypukła w słabej–* topologii.

Uwaga, w przestrzeni liniowej, która nie jest lokalnie wypukła może w ogóle nie być nietrywialnych otwartych zbiorów wypukłych! Na przykład w Przykładzie 3.15, Simon dowodzi, że przestrzeń $L^p([0,1])$ dla $p \in (0,1)$ nie ma żadnych zbiorów wypukłych i otwartych, poza całą przestrzenią. W szczególności nie ma żadnych niestałych funkcjonałów liniowych i ciągłych. Twierdzenia o separacji pokazują, że w przestrzeni lokalnie wypukłej istnieje "dużo" funkcjonałów liniowych i ciągłych.

2. **Twierdzenia o separacji.**

Lemat 3. Niech A i B będą dwoma zbiorami wypukłymi w przestrzeni lokalnie wypukłej[2] i A otwarty. Przypuśćmy, że $A \cap B = \emptyset$. Wtedy istnieje funkcja liniowa i ciągła L taka, że

$$\sup_{a\in A} L(a) \le \inf_{b\in B} L(b).$$

Dowód. Weźmy $x_0 = a_0 - b_0$ dla pewnego $a_0 \in A$ i $b_0 \in B$. Niech $C = x_0 + A - B$, wtedy C jest otwarty (bo A jest otwarty), i wypukły, oraz $0 \notin C$. Rozważmy funkcję $\rho = \rho_C$ jak w (1)

Na mocy twierdzenia Hahna–Banacha istnieje taki funkcjonał L, że $L(x) \le \rho(x)$ i $L(x_0) = \rho(x_0) > 1$. Ponieważ $|L(x)| \le \max(\rho(x), \rho(-x))$, wnosimy, że L jest ciągły w wyjściowej topologii.

Teraz warunek, że $L(x) \le 1$ dla $x \in C$ implikuje, że dla dowolnych $a \in A$ oraz $b \in B$ zachodzi

$$L(a - b + x_0) \le 1 \le L(x_0).$$

Co oznacza dokładnie, że

$$L(a) \le L(b).$$

□

[1] Zostawiamy to jako ćwiczenie

[2] [MB] Wydaje mi się, że z lokalnej wypukłości korzystamy dopiero w dalszej części, dokładnie w Lemacie 5, ale mogę się mylić

Przypuśćmy, że A jest zbiorem otwartym. Twierdzimy, że obraz $L(A)$ jest otwarty. Istotnie, wybierzmy dowolne x_0 takie, że $L(x_0) \neq 0$. Wtedy zbiór $L(y + tx_0)$ gdzie $|t|$ jest mały, jest otwarty w $\mathbb{R}$ zawarty w obrazie $L(A)$.

Lemat 4. Niech A i B będą dwoma otwartymi zbiorami wypukłymi w X. Jeśli są rozłączne, to istnieje ϕ liniowe takie, że

$$\sup_{a\in A} L(a) < \inf_{b\in B} L(b).$$

Dowód. Weźmy L z Lematu 3. Wtedy istnieje takie x, że $L(A) \subset (-\infty, x]$ oraz $L(B) \subset [x, \infty)$. Ale obrazy $L(A)$ i $L(B)$ są otwarte, a to znaczy, że $L(A)$ jest w $(-\infty, x)$ i $L(B)$ jest zawarty w (x, ∞). Czyli teza lematu jest spełniona. □

Lemat 5. Niech A i B będą rozłączne wypukłe i *domknięte*. Przypuśćmy, że B jest zwarty. Wtedy istnieje funkcjonał L taki, że

$$\sup_{a\in A} L(a) < \inf_{b\in B} L(b).$$

Dowód. Rozważmy zbiór $C = A - B$. Zwartość B implikuje, że C jest domknięty. Istotnie, jeśli ciąg $x_n = a_n - b_n$ dąży do x, to możemy wybrać podciąg zbieżny z ciągu b_n wtedy b_n dąży do b, a więc a_n ma granicę. Granica ta leży w A, więc x należy do C.[3]

Teraz korzystamy z lokalnej wypukłości. Skoro $X \setminus C$ jest otwarty i zawiera 0, istnieje zbiór otwarty i wypukły W, który zawiera 0 i jest zawarty w $X \setminus C$. To oznacza, że zbiory $A + \frac{1}{2}W$ i $B + \frac{1}{2}W$ są otwarte, wypukłe i rozłączne. Korzystamy z Lematu 4. □

3. **Twierdzenie Kreina–Milmanna.**

Definicja 3. Niech A będzie podzbiorem wypukłym przestrzeni liniowej X. Powiemy, że punkt x jest *punktem ekstremalnym* A jeśli warunek $x = ty + (1-t)z$ dla $t \in [0, 1]$ i $z, y \in A$, implikuje że $x \in \{y, z\}$.

Definicja 4. Niepusty i właściwy zbiór $F \subset A$ jest nazywany ścianą, jeśli dla dowolnego $x \in F$, warunek $x = ty + (1-t)z$, $y, z \in A$ i $t \in [0, 1]$, wynika iż $z, y \in F$.

Klasycznych przykładów ściany dostarczają funkcjonały liniowe.

Przykład 3. Niech $l\colon X \to \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem liniowym (niekoniecznie ciągłym!), niestałym na A. Przypuśćmy, że $\sup_{a\in A} l(a) = \alpha \neq \infty$. Wtedy zbiór

$$F_l = \{x \in A\colon l(x) = \alpha\}$$

jeśli jest niepusty, jest ścianą.

Jeśli l jest ciągły to F_l jest domknięty. Jeżeli ponadto A jest zwarty, to F_l jest automatycznie niepusty.

Lemat 6. Jeśli A domknięty i wypukły a X lokalnie wypukła, to każdy punkt $x \in \partial A$ należy do pewnej ściany.

[3]Simon w swojej książce używa ciągów uogólnionych (ang. net), co wydaje się bardziej ścisłe. Ciąg uogólniony to zbiór punktów x_α sparametryzowanych uporządkowanym zbiorem I. Mówimy, że ma granicę x, jeśli dla każdego U otwartego zawierającego x, istnieje $\gamma \in I$ taki, że dla wszystkich $\beta > \gamma$ zachodzi $x_\beta \in U$.

Dowód. Rozważmy $B = A^{int}$. Wtedy B wypukły, otwarty i rozłączny z x. Wtedy istnieje funkcjonał L taki, że $L(b) \leq L(x)$ dla $b \in B$. Ponieważ B jest otwarty, $L(B) \in (-\infty, L(x))$, więc zbiór

$$\{a \in A \colon L(a) = L(x)\}$$

jest ścianą. □

Od tej pory będziemy rozważać wyłącznie ściany domknięte.

Twierdzenie 1 (Twierdzenie Kreina–Millmana)**.** Niech A będzie zwartym i wypukłym podzbiorem lokalnie wypukłej przestrzeni topologicznej X. Wtedy A jest otoczką wypukłą swoich punktów ekstremalnych.

Dowód. Rozważmy rodzinę $\mathcal{F}$ ścian domkniętych A. Jest to niepusta rodzina uporządkowana przez zawieranie, to znaczy $F_1 < F_2$ jeśli $F_1 \supset F_2$. Każdy łańcuch jest ograniczony, bo jeśli $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$, to $F_\infty = \bigcap F_j$ jest niepusty jako przecięcie zstępującej rodziny zbiorów zwartych. Niech $\mathcal{E}$ będzie rodziną elementów maksymalnych w $\mathcal{F}$. Twierdzimy, że elementy $\mathcal{E}$ to zbiory ekstremalne. Istotnie, jeśli $E \in \mathcal{E}$, i $x, y \in E$ oraz $x \neq y$, wybieramy funkcjonał liniowy i ciągły l taki, że $l(x) \neq l(y)$. Wtedy zbiór

$$\{a \in A \colon l(a) = \sup_{e \in E} l(e)\}$$

jest niepusty (bo E zwarty) i nie jest całym E, bo albo x albo y nie należy do tego zbioru. A więc jest to nietrywialna ściana, co przeczy maksymalności E.

Niech teraz B będzie otoczką wypukłą punktów ekstremalnych A. Oczywiście $B \subset A$. Przypuśćmy, że istnieje $x \in A \setminus B$. Jako, że B i $\{x\}$ są zwarte, możemy oddzielić B od x za pomocą funkcjonału liniowego l. Możemy przyjąć, że $l(x) > l(b)$ dla $b \in B$. Wtedy jednak, zbiór

$$F = \{a \in A \colon L(a) = \sup_{a \in A} L(a)$$

jest ścianą A, która jednak jest rozłączna z B. Ale F jako zbiór wypukły i zwarty ma co najmniej jeden punkt ekstremalny i punkt ten jest również punktem ekstremalnym A. Ale w B były wszystkie punkty ekstremalne A, sprzeczność. □