Kolokwium z Analizy II*, 6 grudnia 2013

Maciej Borodzik

wersja poprawiona poniewczasie Na ocenę bardzo dobrą należy zrobić 6 zadań spośród podanych. Na ocenę dostateczną należy zrobić 3 zadania.

Zadanie 1. Niech $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x + 2y - z^6 & z \in \mathbb{Q} \\ x + 2y + z^4 & z \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Wykaż, że f ma różniczkę w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy f jest ciągła w punkcie a.

Zadanie 2. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości przyjmowane przez funkcję $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}$ na zbiorze zadanym przez równania $xyz = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 4$ (x, y i z są dodatnie).

Zadanie 3. Długość krzywej γ sparametryzowanej przez $t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$, $t \in [0,1]$, $y \geq 0$ w metryce hiperbolicznej zapisuje się wzorem

$$L[\gamma] = \int_0^1 \frac{1}{y}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2},$$

gdzie $\dot{x}$ i $\dot{y}$ oznaczają pochodne.

Wypisując równania Eulera–Lagrange'a wykaż, że najkrótsza krzywa łącząca dwa dane punkty to półokrąg o środku leżącym na prostej $y = 0$ (jeśli współrzędne x–owe tych dwóch punktów są równe, półokrąg zastępujemy półprostą pionową.

Wskazówka: Łatwiej jest minimalizować całkę z kwadratu długości (uzasadnij, dlaczego można). Ponadto można przyjąć, że krzywa jest parametryzowana długością łuku, to znaczy $\frac{1}{y}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ nie zależy od t.

Zadanie 4. Na przestrzeni ciągów $l^1(\mathbb{R})$ (ciągi $a_0, a_1, \ldots$ o wyrazach rzeczywistych, takie, że $||a|| := \sum |a_i| < \infty$) rozpatrujemy funkcję $a \mapsto ||a||$. Zbadaj istnienie pochodnych kierunkowych i pochodnej zupełnej.

Zadanie 5. Znajdź (może być opisowo, byle czytelnie) jakąś funkcję Morse'a na butelce Kleina. Znajdź jej punkty krytycznie i określ ich indeks. Oblicz charakterystykę Eulera butelki Kleina.[1]

Zadanie 6. Znajdź wszystkie punkty ekstremalne w domkniętej kuli jednostkowej w przestrzeni $C([0,1])$ z normą sup.

Zadanie 7. Rozstrzygnij, czy zbiór takich macierzy z $SO(3)$, których co najmniej dwie wartości własne są sobie równe, jest rozmaitością. Jeśli tak, podaj jej wymiar. Co się dzieje, gdy zamienić $SO(3)$ na $GL(3;\mathbb{R})$?

Zadanie 8. Niech $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie klasy C^2. Wykaż, że f spełnia równanie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

[1] Butelka Kleina może być opisana topologicznie jako $[0,1] \times [0,1]/\sim$, gdzie $(0,y) \sim (1,y)$ oraz $(x,0) \sim (1-x,1)$.

we wszystkich punktach $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego (x,y) i dowolnego $t \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$f(x, y+2t) + f(x,y) = f(x+t, y+t) + f(x-t, y+t).$$

Zadanie 9. Funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest klasy C^∞ a punkt $(0,0)$ jest jej punktem krytycznym i $f(0,0)=0$. Przypuśćmy, że

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0.$$

Wykaż, że istnieje takie $\varepsilon > 0$, że zbiór

$$A_\varepsilon := \{(x,y) \neq (0,0)\colon x^2+y^2 \leq \varepsilon^2, f(x,y)=0\}$$

ma co najwyżej cztery składowe spójne.

Wskazówka: skorzystaj z twierdzenia Tougerona.

Zadanie 10. Niech $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ będzie C^1 gładką krzywą zamkniętą homeomorficzną z okręgiem (tzn. krzywą Jordana, każda taka krzywa rozcina $\mathbb{R}^2$ na dwie niepuste składowe, z których jedna jest ograniczona). Rozważmy funkcję $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$f(x) = \mathrm{dist}(x, C)^2,$$

czyli kwadrat odległości euklidesowej punktu x od krzywej. Wykaż, że f jest C^1 gładka w otoczeniu C, ale nie jest gładka na całej $\mathbb{R}^2$ niezależnie od wyboru γ.

Zadanie 11. Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie k–wymiarową ($k < n$) nieorientowalną podrozmaitością domkniętą. Wykaż, że nie istnieją funkcje gładkie $f_1, \dots, f_{n-k}$ takie, że $M = \{f_1 = \ldots = f_{n-k} = 0\}$ oraz dla każdego $x \in M$ gradienty $\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_{n-k}(x)$ są liniowo niezależne.

Zadanie 12. Wykaż, że jeśli zwarta rozmaitość n–wymiarowa bez brzegu dopuszcza funkcję Morse'a z dokładnie dwoma punktami krytycznymi, to jest homeomorficzna ze sferą.

Zadanie 13. Niech U będzie macierzą hermitowską wymiaru $(n+1)\times(n+1)$ mającą różne wartości własne. Wykaż, że funkcja

$$\Lambda(z) := \langle z, Uz\rangle / ||z||^2$$

określona na $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ zadaje funkcję na zespolonej przestrzeni rzutowej $\mathbb{C}P^n$. Znajdź punkty krytyczne i oblicz ich indeks.