Kolokwium z Analizy II^*

1.VI.2007.

Zadanie 1 (całki)**.** Znajdź taką krzywą $C \subset \mathbb{R}^2$, gładką i zamkniętą, dodatnio zorientowaną (tzn. wektor styczny i normalny zewnętrzny stanowią orientację dodatnią), żeby całka

$$\int_C (4y^3 - 6xy)dx + (4x - 3x^3)dy$$

była możliwie największa i oblicz tę całkę.

Rozwiązanie. Niech $\omega = (4y^3 - 6xy)dx + (4x - 3x^3)dy$. Obserwujemy, że $d\omega = (-9x^2 - 6x + 4 - 12y^2)dx \wedge dy)$.Czyli $d\omega$ jest dodatnia (dokładnie jest dodatnią wielokrotnością formy $dx \wedge dy$) na zbiorze $S = \{(3x+1)^2 + 12y^2 < 3\}$, ujemna we wnętrzu dopełnieniu tego zbioru i znika na ∂S.Jasne jest więc, że $\int_C \omega$ będzie maksymalne wtedy, gdy $C = \partial S$. A więc będzie równe

$$\int_S 3 - (3x+1)^2 - 12y^2 = \left\{ \begin{aligned} u &= \sqrt{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ v &= 2y \\ dxdy &= 2\sqrt{3}dudv \end{aligned} \right\} = 6\sqrt{3}\int_{u^2+v^2=1} (1 - u^2 - v^2) =$$

$$= \left\{ \begin{aligned} u &= r\cos\phi \\ v &= r\sin\phi \\ dudv &= rdrd\phi \end{aligned} \right\} = 12\pi\sqrt{3}\int_0^1 (r - r^3)dr = 3\pi\sqrt{3}.$$

□

Zadanie 2 (całki)**.** Niech $S = \{(r,\phi) \in \mathbb{R}^2 : r \leq \cos^3\phi, \phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$ będzie podzbiorem w $\mathbb{R}^2$. Oblicz

$$\int_S \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{1 - x^{2/3}}}\ x^{-2/3}e^{\arccos\sqrt[3]{x}dx\wedge dy}.$$

Rozwiązanie. Kluczowa jest obserwacja, że $\eta = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{1-x^{2/3}}}\ x^{-2/3}e^{\arccos\sqrt[3]{x}}dx \wedge dy$ jest różniczką formy $\omega = e^{\arccos\sqrt[3]{x}}dy$. Czyli, z twierdzenia Stokesa

$$\int_S \eta = \int_{r=\cos^2\phi} e^{\arccos\sqrt[3]{x}}dy.$$

Ostatnią całkę wyliczamy biorąc $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, czyli $dy = (-2\cos\phi\sin^2\phi + \cos^3\phi)d\phi$. Ostatecznie

$$\int_S \eta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\phi}(\cos^3\phi - 2\cos\phi\sin^2\phi)d\phi.$$

Dojście do tego momentu wystarczało na uzyskanie pełnej liczby punktów: uznałem, że liczenie tej całki jest czasochłonne. Jeden z najprostszych sposobów policzenia tej całki polega na zastosowaniu wzoru

$$\cos\phi = \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi}), \quad \sin\phi = \frac{1}{2}(-ie^{i\phi} + ie^{-i\phi}).$$

Niech $a = \frac{1}{2}e^{i\phi}$, $b = \frac{1}{2}e^{-i\phi}$. Wtedy $\cos^3\phi = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, zaś $\cos\phi\sin^2\phi = -a^3 + ab^2 + a^2b - b^3$. A zatem $\cos^3\phi - 2\cos\phi\sin^2\phi = 3a^3 + a^2b + ab^2 + 3b^3 = \frac{1}{8}(3e^{3i\phi} + e^{i\phi} + e^{-i\phi} + 3e^{-3i\phi}$. Zaobserwujmy, że

$$\int_{-\pi/2}^{\pi^2} e^{\phi} \cdot e^{ik\phi} = \frac{1}{1+ik}\left(e^{\pi/2}(\cos k\frac{\pi}{2} + i\sin k\frac{\pi}{2}) - e^{-\pi/2}(\cos k\frac{\pi}{2} - i\sin k\frac{\pi}{2})\right).$$

Stąd uzyskujemy, że wyjściowa całka, z dokładnością do czynnika $\frac{1}{8}$ wynosi

$$e^{\pi/2}\left(\frac{-3i}{1+3i}+\frac{i}{1+i}+\frac{-i}{1-i}+\frac{3i}{1-3i}\right)-e^{-\pi/2}\left(\frac{-3i}{1+3i}+\frac{i}{1+i}+\frac{-i}{1-i}+\frac{3i}{1-3i}\right).$$

Istotnie, kosinus kątów będących nieparzystymi wielokrotnościami $\pi/2$ znika. Mamy $\frac{i}{1+i}+\frac{-i}{1-i}=1$. Ponadto $\frac{-i}{1+3i}+\frac{i}{1-3i}=-\frac{3}{5}$. Ostatecznie

$$\int_S \eta = -\frac{1}{10}(e^{\pi/2}+e^{-\pi/2}).$$

$\square$

Zadanie 3 (Twierdzenie E. Noether)**.** Niech $L(y,z):\mathbb{R}^6\to\mathbb{R}$ będzie gładką funkcją dwóch zmiennych wektorowych. Załóżmy, że istnieje grupa h^s (w lokalnych współrzędnych $h^s(y)=(h_1(y),h_2(y),h_3(y)))$ dyfeomorfizmów $\mathbb{R}^3$ taka, że dla dowolnego s

$$L(h^s(y),Dh^s(y)\cdot z)=L(y,z) \tag{1}$$

L jako funkcja z $T\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ jest niezmiennicza względem h^s, przy czym oczywiście

$$Dh^s(y)\cdot z=\sum\frac{\partial h_i^s(y)}{\partial y_j}z_j. \tag{2}$$

Udowodnij, że wielkość

$$\sum_{i=1}^3\frac{\partial L}{\partial z_i}\left.\frac{dh_i^s(y)}{ds}\right|_{s=0},$$

jest całką pierwszą układu Eulera–Lagrange'a związanego z działaniem

$$I[y]=\int_{\mathbb{R}}L(y(x),y'(x))dx.$$

Wypisz tę całkę pierwszą w sytuacji gdy $L(y,z)=\frac{1}{2}(z_1^2+z_2^2+z_3^2)-U(y_1^2+y_2^2+y_3^2)$, $U:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ jest dowolną funkcją gładką, zaś grupa dyfeomorfizmów dana jest przez $h^s(y)=e^{As}y$ przy czym A jest macierzą 3×3 taką, że $A+A^T=0$.

Rozwiązanie. Oznaczmy przez $X_i(y)$ współrzędną $\left.\frac{dh_i^s(y)}{ds}\right|_{s=0}$. (Wektor $X=(X_1,\dots,X_3)$ nazywa się czasem infinitezymalnym generatorem grupy h^s, ale tego wiedzieć nie trzeba). Różniczkując $Q=\sum_{i=1}^3\frac{\partial L}{\partial z_i}X_i(y)$ po x uzyskujemy

$$\frac{dQ}{dx}=\sum_{i=1}^3 X_i\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z_i}+\sum_{i=1}^3\frac{\partial L}{\partial z_i}\frac{d}{dx}X_i(y). \tag{3}$$

Chcemy pokazać, że ta pochodna jest zero. Wielkość $\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z_i}$ przywodzi na myśl równanie Eulera–Lagrange'a. Jeśli pokażemy, że

$$\sum_{i=1}^3\frac{\partial L}{\partial z_i}\frac{d}{dx}X_i(y)=-\sum_{i=1}^3 X_i(y)\frac{\partial L}{\partial y_i}, \tag{4}$$

to wstawiając (4) do (3) dostaniemy

$$\frac{dQ}{dx}=\sum_{i=1}^3 X_i\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z_i}-\frac{\partial L}{\partial y_i}\right),$$

co zniknie na mocy równań E–L. Pozostaje więc pokazać (4). To będzie wynikało z niezmienniczości lagranżjanu względem działania h^s. Gdzieś przecież trzeba z tego skorzystać. Różniczkując wyrażenie (1) po s i biorąc $s=0$ otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^3\left(\frac{\partial L}{\partial y_i}X_i(y)+\frac{\partial L}{\partial z_i}\sum_{j=1}^3\frac{\partial X_i}{\partial y_j}z_j\right)=0.$$

Drugi człon w powyższym wzorze wynika z różniczkowani po s wielkości (2). Z drugiej strony

$$\frac{d}{dx}X_i(y(x)) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial X_i}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial X_i}{\partial y_j} z_j.$$

Połączenie dwóch ostatnich wzorów daje (4). Czyli istotnie $\frac{dQ}{dx} = 0$.

Druga część jest banalna. Istotnie, jeśli $A + A^T = 0$, to e^{As} jest macierzą obrotów. Czyli h^s działa liniowo przez izometrie, w szczególności zachowuje normę punktu i długość wektorów stycznych. A więc zachowuje L.

W takim wypadku mamy $\frac{\partial L}{\partial z_i} = 2z_i$. Natomiast $\frac{dh^s(y)}{ds} = Ay$. Czyli ostatecznie

$$Q = 2\sum_{i,j=1}^{3} z_i A_{ij} y_j.$$

Zauważając, że macierz

$$A = a\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

możemy przyjąć, że $Q = aQ_1 + bQ_2 + cQ_3$, gdzie

$$\begin{aligned} Q_1 &= z_1y_2 - z_2y_1 \\ Q_2 &= z_1y_3 - z_3y_1 \\ Q_3 &= z_2y_3 - z_3y_2. \end{aligned}$$

Q_1, Q_2 i Q_3 są trzema składowymi wektora momentu pędu. □

Zadanie 4 (kohomologie)**.** Oblicz grupy kohomologii zespolonej przestrzeni rzutowej $\mathbb{C}P^2$. Wskazówka. Skorzystaj z tego, że $\mathbb{C}P^2 = \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{C}P^1$, gdzie $\mathbb{C}P^1 = S^2$. Mamy też $H^0(S^n) = H^n(S^n) = \mathbb{R}$ a pozostałe grupy znikają.

Rozwiązanie. Poniższe rozwiązanie jest bardzo szczegółowe, więc może wydawać się trudne. Takie jednak nie jest.

Zbadajmy przecięcie $\mathbb{C}^2$ z otoczeniem $\mathbb{C}P^1$. Nie potrzebujemy tutaj wielu informacji o strukturze $\mathbb{C}P^2$ poza tym, że jest to uzwarcenie $\mathbb{C}^2$: $\mathbb{C}^2$ jest gęsty i otwarty w $\mathbb{C}P^1$. Przydatna tutaj może być analogia z uzwarceniem jednopunktowym (Aleksandrowa) lokalnie zwartej przestrzeni topologicznej. Otóż zbiór otwarty, który zawiera $\mathbb{C}P^1$ to taki, którego dopełnienie w $\mathbb{C}^2$ jest zwarte. Weźmy sobie zbiór $U_1 = |z_1|^2 + |z_2|^2 < R$ i zbiór $U_2^0 = |z_1|^2 + |z_2|^2 > r$ wtedy zbiór $U_2 = U_2^0 \cup \mathbb{C}P^1$ jest otwarty w $\mathbb{C}P^2$. Przecięcie $U_1 \cap U_2$ jest pogrubioną sferą S^3. Pozostaje pokazać, że U_2 jest homotopijnie równoważny z $\mathbb{C}P^1$. Do tego celu można albo zamachać rękami, albo skonstruować retrakcję U_2 na $\mathbb{C}P^1$. Mianowicie punktowi $(z_1, z_2) \in U_2$ przypisujemy liczbę zespoloną $z_1/z_2 \in \mathbb{C}$ lub punkt w nieskończoności, gdy $z_2 = 0$. W ten sposób mamy określone odwzorowanie z $\pi : U_2^0 \to \mathbb{C}P^1$. Z definicji π przedłuża się na U_2 i jest stałe na wklejonej $\mathbb{C}P^1$. Dla każdego $z \in \mathbb{C}P^1$ zbiór $\pi^{-1}(z)$ składa się z punktów $(z_1, z_2) : z_1/z_2 = z, |z_1|^2 + |z_2|^2 > r$ (które to zbiór jest homeomorficzny z wykłutym dyskiem) i punktu $z \in \mathbb{C}P^1$, który ten dysk zakleja. W związku z tym $\pi^{-1}(z)$ jest dyskiem, czyli jest ściągalny. Teraz już jest zupełnie jasne, że π jest homotopijną równoważnością.

Mamy więc następujący ciąg dokładny:

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & \longrightarrow & H^0(\mathbb{C}P^2) & \longrightarrow & H^0(\mathbb{C}P^1)\oplus H^0(\mathbb{C}^2) & \longrightarrow & H^0(S^3) & \longrightarrow \\
 & \longrightarrow & H^1(\mathbb{C}P^2) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{C}P^1)\oplus H^1(\mathbb{C}^2) & \longrightarrow & H^1(S^3) & \longrightarrow \\
 & \longrightarrow & H^2(\mathbb{C}P^2) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{C}P^1)\oplus H^2(\mathbb{C}^2) & \longrightarrow & H^2(S^3) & \longrightarrow \\
 & \longrightarrow & H^3(\mathbb{C}P^2) & \longrightarrow & H^3(\mathbb{C}P^1)\oplus H^3(\mathbb{C}^2) & \longrightarrow & H^3(S^3) & \longrightarrow \\
 & \longrightarrow & H^4(\mathbb{C}P^2) & \longrightarrow & H^4(\mathbb{C}P^1)\oplus H^4(\mathbb{C}^2) & \longrightarrow & H^4(S^3) & \dots
\end{array}$$

W pierwszej linijce mamy $0 \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ w szczególności $H^1(\mathbb{C}P^2) \to H^1(\mathbb{C}P^1)$ jest włożeniem. Ponieważ $\mathbb{C}P^1 = S^2$, mamy $H^1(\mathbb{C}P^2) = 0$.

Po drugie $H^1(S^3) = H^2(S^3) = 0$. Tak więc odwzorowanie $H^2(\mathbb{C}P^2) \to H^2(\mathbb{C}P^1)$ jest izomorfizmem. Stąd $H^2(\mathbb{C}P^2) = \mathbb{R}$.

Teraz patrzymy na $H^3(\mathbb{C}P^2)$. Mamy $H^2(S^3) = 0$ i $H^3(\mathbb{C}P^1) = 0$. Stąd $H^3(\mathbb{C}P^2) = 0$.

Policzmy $H^4(\mathbb{C}P^2)$. Mamy $H^3(\mathbb{C}P^1) = H^4(\mathbb{C}P^1) = 0$. A więc $H^3(S^3)$ jest izomorficzne z $H^4(\mathbb{C}P^2)$. Czyli ta ostatnia grupa jest $\mathbb{R}$. Nietrudno zauważyć, że wszystkie wyższe grupy są zerowe. Ostatecznie

$$H^i(\mathbb{C}P^2) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{gdy } i = 0, 2, 4 \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

□

Zadanie 5 (gwiazdka Hodge'a)**.** Torus $T \subset \mathbb{R}^3$ sparametryzowany jest przez

$$\begin{cases} x = (R + r\cos\phi)\cos\lambda \\ y = (R + r\cos\phi)\sin\lambda \\ z = r\sin\phi, \end{cases}$$

gdzie $0 < r < R$. Oblicz $*d\phi$ na T.

Rozwiązanie. Mamy

$$\frac{\partial}{\partial\phi} = \frac{\partial x}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial z} = -r\sin\phi\cos\lambda\frac{\partial}{\partial x} - r\sin\phi\sin\lambda\frac{\partial}{\partial y} + r\cos\phi\frac{\partial}{\partial z}.$$

Zachodzi też

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} = \frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial z} = -(R + r\cos\phi)\sin\lambda\frac{\partial}{\partial x} + (R + r\cos\phi)\cos\lambda\frac{\partial}{\partial y}.$$

Stąd widzimy, że wektory $\frac{\partial}{\partial\phi}$ i $\frac{\partial}{\partial\lambda}$ są prostopadłe. Pierwszy ma długość r, drugi zaś $(R+r\cos\phi)$. Oznacza to, że wektory $v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}$ i $w = \frac{1}{R+r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}$ tworzą bazę ortonormalną przestrzeni stycznej do T. A więc formy $\omega_1 = r d\phi$ i $\omega_2 = (R + r\cos\phi)d\lambda$ tworzą bazę ortonormalną przestrzeni $1-$form. Czyli

$$*\omega_1 = \omega_2, \quad *\omega_2 = -\omega_1.$$

Z liniowości gwiazdki mamy

$$*d\phi = \frac{R + r\cos\phi}{r}d\lambda.$$

Zauważmy, że $*d\phi$ *musi* być jednoformą, dlatego że T jest dwuwymiarowe. □