JESZCZE O FUNKCJACH k-LINIOWYCH.

MACIEJ BORODZIK

Definicja 1. Niech V będzie przestrzenią Banacha. *Funkcją* a. *formą* k–liniową (przy czym to drugie określenie stosowane jest przede wszystkim dla funkcji symetrycznych, lub antysymetrycznych) nazwiemy odwzorowanie $F : V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$ (iloczyn k-krotny), takie że

$$\begin{aligned} F(a_1, \ldots, a_{i-1}, \lambda a_i + \mu b_i, a_{i+1}, \ldots, a_k) = \\ = \lambda F(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_k) + \mu F(a_1, \ldots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \ldots, a_k) \end{aligned}$$

dla dowolnych skalarów λ, μ i $a_1, \ldots, a_k, b_i \in V$.

Definicja 2. Powiemy, że funkcja k–liniowa jest *ograniczona* jeśli istnieje taka stała $C > 0$, że dla wszystkich $a_1, \ldots, a_k \in V$ zachodzi

$$|F(a_1, \ldots, a_k)| \leq C \cdot ||a_1|| \cdot ||a_2|| \cdot \cdots \cdot ||a_k||.$$

Lemat 1. *F jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczona (na $V \times \cdots \times V$ bierzemy topologię produktową, zadaną na przykład przez $||(v_1, \ldots, v_k)|| = \max\{||v_1||, \ldots, ||v_k||\}$).*

Dowód. Przypuśćmy, że F jest ograniczona. Niech $a_1, \ldots, a_k \in V$. Określamy $M = 2 \cdot \max ||a_i||$. Weźmy $(v_1, \ldots, v_k)$ takie, że $||v_i|| < \frac{\varepsilon}{CkM^{k-1}}$ dla $1 \leq i \leq k$. Pokażemy (bardzo rozrzutnie), że

$$|F(a_1 + v_1, a_2 + v_2, \ldots, a_k + v_k) - F(a_1, \ldots, a_k)| \leq \varepsilon.$$

Zachodzi

$$\begin{aligned} \Delta_i \overset{def}{=} & |F(a_1 + v_1, \ldots, a_i + v_i, a_{i+1} + v_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_k) \\ & -F(a_1 + v_1, \ldots, a_i + v_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_k)| = \\ =& |F(a_1 + v_1, \ldots, a_i + v_i, v_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_k)| \leq \\ \leq & C||a_1 + v_1|| \cdot \cdots \cdot ||a_i + v_i|| \cdot ||v_{i+1}|| \cdot ||a_{i+2}|| \cdot ||a_k|| \leq \\ \leq & CM^i \frac{\varepsilon}{CkM^{k-1}} M^{k-i-1} = \frac{\varepsilon}{k}. \end{aligned}$$

Ale zachodzi teraz

$$|F(a_1 + v_1, a_2 + v_2, \ldots, a_k + v_k) - F(a_1, \ldots, a_k)| \leq \Delta_{k-1} + \ldots + \Delta_0 \leq \varepsilon$$

na mocy nierówności trójkąta. W ten sposób dostajemy ciągłość z ograniczoności.

Przypuśćmy teraz, że F nie jest ograniczona. Oznacza to, że istnieje taki ciąg $(a_1^{(n)}, \ldots, a_k^{(n)})$, że $||a_i^{(n)}|| = 1$ (zawsze sobie tak możemy ustalić) ale

$$|F(a_1^{(n)}, \ldots, a_k^{(n)})| > n^{k+1}. \tag{1}$$

Kładziemy teraz $b_i^{(n)} = \frac{a_i^{(n)}}{n}$. Mamy $\max\limits_{i=1,\ldots,k} ||b_i^{(n)}|| = \frac{1}{n}$, więc $(b_1^{(n)}, \ldots, b_k^{(n)}) \to 0$. Z drugiej strony z k-liniowości odwzorowania F oraz warunku (1) mamy

$$|F(b_1^{(n)}, \ldots, b_k^{(n)})| > n.$$

Co przeczy ciągłości F. □

Określmy teraz pochodną Frecheta funkcji F. Zachodzi

Lemat 2. *Jeśli F jest k-liniowa i ograniczona, to ma pochodną Frécheta w każdym punkcie $(a_1, \ldots, a_k) \in V \times V$. Pochodna Frécheta jest zadana wzorem*

$$\begin{aligned} (v_1, \ldots, v_k) \to & D(v_1, \ldots, v_k) \overset{def}{=} F(v_1, a_2, \ldots, a_k) + \\ & + F(a_1, v_2, a_3, \ldots, a_k) + \ldots + F(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, v_k), \end{aligned} \tag{2}$$

przy czym wzór (2) *należy rozumieć jako przekształcenie liniowe, które elementowi przestrzeni* $V \times \dots \times V$ *przypisuje element po prawej stronie wzoru* (2). *Innymi słowy, struktura ta jest zadana przez*

$$\lambda(v_1, \dots, v_k) = (\lambda v_1, \dots, \lambda v_k)$$
$$(v_1, \dots, v_k) + (w_1, \dots, w_k) = (v_1 + w_1, \dots, v_k + w_k).$$

Dowód. Niech $v_1, \dots, v_k$ będą takie, że $||v_i|| \leq \varepsilon$. Rozważmy wielkość

$$F(a_1 + v_1, \dots, a_k + v_k).$$

Rozwijając ją z k-liniowości otrzymujemy

$$\begin{aligned} F(a_1 + v_1, \dots, a_k + v_k) &= F(a_1, a_2 + v_2, \dots, a_k + v_k) + F(v_1, a_2 + v_2, \dots, a_k + v_k) = \\ &= F(a_1, a_2, a_3 + v_3, \dots) + F(a_1, v_2, a_3 + v_3, \dots) + \\ &+ F(v_1, a_2, a_3 + v_3, \dots) + F(v_1, v_2, a_3 + v_3, \dots) = \\ &= \dots = \\ &= F(a_1, \dots, a_k) + F(v_1, a_2, \dots, a_k) + F(a_1, v_2, a_3, \dots, a_k) + \\ &+ \dots + F(a_1, \dots, a_{k-1}, v_k) + \\ &+ \text{funkcje, które mają co najmniej dwa argumenty } v_i \text{ i } v_j. \end{aligned}$$

Jednakże, z ciągłości, mamy $F(v_1, v_2, a_3, \dots, a_k) = O(\varepsilon^2)$, podobnie wszystkie inne człony powyższego rozwinięcia, które mają i elementów v i $k - i$ elementów a, jak na przykład $F(a_1, \dots, a_{k-i}, v_{k-i+1}, \dots, v_k)$, są $O(\varepsilon^i)$. Tak więc

$$F(a_1 + v_1, a_2 + v_2, \dots, a_k + v_k) - F(a_1, \dots, a_k) = D(v_1, \dots, v_k) + O(\varepsilon^2).$$

To zaś dowodzi tego, że D jest pochodną Frécheta F. $\square$

Przykład 1. Niech $F(a_1, \dots, a_k)$ będzie równy wyznacznikowi macierzy utworzonej przez kolumnowo zapisane wektory $a_1, \dots, a_k$. Niech $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (jedynka na i-tym miejscu). W takim przypadku DF w punkcie $(e_1, \dots, e_k)$ na wektorach $(v_1, \dots, v_k)$ jest równe

$$F(v_1, e_2, \dots, e_k) + F(e_1, v_2, e_3, \dots, e_k) + \dots + F(e_1, \dots, e_{k-1}, v_k). \tag{3}$$

Weźmy dla przykładu pierwszy człon w (3). Jest on równy

$$\begin{vmatrix} v_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ v_{12} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ v_{13} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ v_{1k} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Rozwijając ten wyznacznik kolejno względem k–tej, $(k-1)$–szej itd. kolumny, wnioskujemy, że jest on równy v_{11}. Podobnie rozumując uzyskujemy, że i-ty człon w (3) jest równy v_{ii}. Stąd pochodna w kierunku $(v_1, \dots, v_k)$ jest równa śladowi macierzy utworzonej przez $(v_1, \dots, v_k)$.