Równanie geodezyjnej z równań Eulera–Lagrange'a

wersja 1.0.β z 09 listopada 2006

Maciej Borodzik

Poniżej prezentuję rachunki, które prawie zostały wykonane na ćwiczeniach. Nie są one trudne.

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem a $\{g_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ — strukturą Riemanna na Ω, gdzie $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Dla krzywej $\gamma : [a, b] \to \Omega$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ określamy *długość* wzorem:

$$l[\gamma] = \int_a^b (\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\gamma(t))\dot\gamma_i(t)\dot\gamma_j(t))^{1/2})dt. \tag{1}$$

Naszym zadaniem jest znalezienie równania na minimum tego funkcjonału.

Niech $R : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie określone wzorem $R(x, y) = \sum\limits_{i,j=1}^n g_{ij}(x)y_iy_j$. Wtedy wzór (1) można przepisać w postaci

$$l[\gamma] = \int_a^b R(\gamma(t), \dot\gamma(t))^{1/2}dt.$$

W związku z tym funkcja działania (oznaczana do tej pory przez L to nic innego jak $R^{1/2}$. Obliczmy pochodną $R^{1/2}(x, y)$ po x_k i po y_k:

$$\frac{\partial R^{1/2}}{\partial x_k} = \frac{1}{2}R^{-1/2}\frac{\partial R}{\partial x_k} = \frac{1}{2R}\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(x)y_iy_j. \tag{2}$$

oraz

$$\frac{\partial R^{1/2}}{\partial y_k} = \frac{1}{2}R^{-1/2}\frac{\partial R}{\partial y_k} = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^n g_{ik}(x)y_i. \tag{3}$$

Ostatnia równość wynika z faktu, że

$$\frac{\partial}{\partial y_k}g_{ij}(x)y_iy_j = g_{ij}(x)y_i\frac{\partial y_j}{\partial y_k} + g_{ij}(x)\frac{\partial y_i}{\partial y_k}y_j = g_{ij}(y_i\delta_{jk} + y_j\delta_{ik}).$$

Wstawiając pod x i y odpowiednio γ i $\dot\gamma$ w (3) uzyskujemy

$$\frac{1}{R}\sum_{i=1}^n g_{ik}(\gamma(t))\dot\gamma_i(t). \tag{4}$$

Następnie musimy tę wielkość zróżniczkować po t. Zauważmy, że

$$\frac{d}{dt}(\sum_{i=1}^n g_{ik}(\gamma(t))\dot\gamma_i(t)) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}\dot\gamma_i(t)\dot\gamma_j(t) + \sum_{i=1}^n g_{ik}(\gamma(t))\ddot\gamma_i(t). \tag{5}$$

Z drugiej strony możemy przyjąć, że krzywa γ jest sparametryzowana długością łuku, to znaczy $R \equiv const$. Istotnie, niech $\tilde\gamma(u)$ będzie dowolną parametryzacją, $\tilde\gamma : [c, d] \to \Omega$. Niech $f : [c, d]$ będzie zadane przez

$$f(u) = \int_c^u R(\tilde\gamma(t), \dot{\tilde\gamma}(t))^{1/2}dt.$$

Wtedy f jest monotoniczna i ciągła, więc istnieje funkcja odwrotna $g : [0, l] \to [c, d]$, gdzie $l = f(d)$ jest długością krzywej. Wtedy, jak łatwo sprawdzić, jeśli przyjmiemy $\gamma(t) = \tilde\gamma(g(t))$, to $R(\gamma(t), \dot\gamma(t)) \equiv const$.

Skoro tak, to $\frac{d}{dt}R(\gamma(t),\dot\gamma(t)) = 0$. A więc pochodna po t wielkości (4) wynosi

$$\frac{1}{R}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}\dot\gamma_i(t)\dot\gamma_j(t) + \sum_{i=1}^{n} g_{ik}(\gamma(t))\ddot\gamma_i(t).$$

Wstawiając do równania Eulera–Lagrange'a: $\frac{\partial L}{\partial y_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial z_k} = 0$ otrzymujemy

$$\frac{1}{R}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(\gamma(t))\dot\gamma_i\dot\gamma_j - \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}\dot\gamma_i(t)\dot\gamma_j(t) - \sum_{i=1}^{n} g_{ik}(\gamma(t))\ddot\gamma_i(t)\right) = 0 \tag{6}$$

Czyli

$$\boxed{\forall k = 1,\ldots,n \quad \sum_{i=1}^{n} g_{ik}\ddot\gamma_i - \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\dot\gamma_i\dot\gamma_j - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}\dot\gamma_i(t)\dot\gamma_j(t)\right) = 0} \tag{7}$$

Otrzymane równanie nazywamy **równaniem geodezyjnej**. Tak naprawdę, mamy tutaj do czynienia z układem n równań różniczkowych, nieliniowych rzędu dwa.

Dla przykładu rozpatrzmy metrykę indukowaną ze sfery. Jak zostało pokazane macierz tej metryki w punkcie (x_1, x_2) ma postać $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & cos^2(x_1)\end{smallmatrix}\right)$. Jeśli podstawimy $k = 1$, to równanie (7) przyjmuje następującą postać

$$\ddot\gamma_1(t) - \sin(2\gamma_1(t))\dot\gamma_2^2(t) = 0, \tag{8}$$

podczas gdy dla $k = 2$ otrzymujemy

$$\cos^2\gamma_1 \cdot \ddot\gamma_2 + \sin(2\gamma_1(t))\dot\gamma_1\dot\gamma_2 = 0. \tag{9}$$

Zadanie 1. *Znajdź rozwiązania równań* (8) *i* (9) *takich, że* $\gamma_1 \equiv 0$ *i* $\gamma_2 \equiv 0$.

Zadanie 2. *Niech v i w będą dwoma prostopadłymi wektorami długości 1. Napisz równanie okręgu o środku w zerze i promieniu 1 należącego do płaszczyzny rozpiętej przez v i w.*

Zadanie 3. *Pokaż, że wszystkie okręgi takie, jak w poprzednim zadaniu, spełniają równania* (8) *i* (9).