Przykład funkcji wypukłej, która nie jest lokalnie ograniczona

Maciej Borodzik

*Według książki Phelpsa.*

Rozpatrzmy przestrzeń $l_2$ składającą się z ciągów

$$\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}.$$

Takich, że

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 = ||\mathbf{x}||^2 < \infty.$$

Jest to przestrzeń Banacha, a nawet Hilberta, jeśli wprowadzimy iloczyn skalarny przez

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

Niech teraz

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & t \leq \frac{1}{2} \\ 2t - 1 & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Funkcja $\phi(t)$ jest kawałkami liniowa i wypukła. Niech $f$ będzie zadana wzorem

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi(\sum_{j=i}^{\infty} x_j^2).$$

Po pierwsze, dla każdego $\mathbf{x} \in l_2$ szereg $\sum x_i^2$ jest zbieżny z definicji. Dlatego też istnieje takie $i_0$, że $\sum_{j=i_0}^{\infty} x_j^2 < \frac{1}{2}$. To dowodzi, że w definicji funkcji $f$ sumujemy tylko skończenie wiele wartości. Czyli, $f$ jest dobrze określona.

Po drugie $f$ jest wypukła. Istotnie, funkcja $\phi(\sum_{j=i}^{\infty} x_j^2)$ jest wypukła, a wypukłość zachowuje się przy przejściu do granicy.

Teraz wystarczy pokazać, że $f$ nie jest ograniczona. Weźmy sobie ciąg $\mathbf{y^{(n)}}$ taki, że $\mathbf{y^{(n)}}$ ma na $n-$tym miejscu jedynkę a poza tym zera. Wtedy

$$\phi(\sum_{j=i}^{\infty} {y_j^{(n)}}^2) = \begin{cases} 0: & j > n \\ 1: & j \leq n \end{cases}.$$

Czyli

$$f(\mathbf{y^{(n)}}) = n.$$

Czyli $f$ nie jest ograniczona na sferze jednostkowej.