Zestaw zadań o iloczynach tensorowych.

wersja 1.0.α z 06 listopada 2006

Maciej Borodzik

1. Definicje i oznaczenia

- V, W, $V^{(1)}, \dots, V^{(r)}$ — przestrzenie liniowe.
- v, v_1, v_2 — wektory w przestrzeni V.
- $e_1, \dots, e_n$ — baza przestrzeni V.
- $v = \sum a_i e_i$ — zapis wektora v w bazie e_i. Analogicznie $v_k = \sum a_{ik} e_i$.
- w, $w_1, \dots$ — wektory w przestrzeni W.
- $f_1, \dots, f_m$ — baza przestrzeni w.
- $w = \sum b_j f_j$ — zapis wektora w w bazie f_j.
- $e_1^{(r)}$ itp. oznaczają elementy w przestrzeni $V^{(r)}$.
- V^*, W^* — przestrzenie sprzężone.
- ξ, ξ_1 — wektory z V^*.
- $\phi_1, \dots, \phi_n$ — baza z V^* dualna do e_i, tzn. $\phi_i(e_j) = \delta_{ij}$.
- $\xi = \sum \alpha_i \phi_i$ — zapis wektora ξ.
- η, η_1 — wektory z W^*.
- $\psi_1, \dots, \psi_m$ — baza w W^* dualna do f.

Inne oznaczenia mogą się zmieniać.

Definicja 1. *Sumą prostą* przestrzeni V i W nazwiemy przestrzeń $V \oplus W$ wraz z odwzorowaniami liniowymi $i_V : V \to V \oplus W$, $i_W : W \to V \oplus W$ takimi, że dla każdej przestrzeni liniowej U i każdej pary odwzorowań $a : V \to U$ i $b : W \to U$ istnieje dokładniej jedno odzworowanie $a \oplus b : V \oplus W \to U$ takie, że następujący diagram jest przemienny

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i_V"] \arrow[dr, "a"'] & V \oplus W \arrow[d, dotted, "a \oplus b"] & W \arrow[l, "i_W"'] \arrow[dl, "b"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Definicja 2. Analogicznie, *sumą prostą* rodziny przestrzeni liniowych $\{V_i\}_{i \in I}$ nazwiemy przestrzeń $V_I = \oplus_{i \in I} V_i$ wraz z odwzorowaniami $i_i : V_i \to V_I$ takimi, że dla każdej przestrzeni liniowej U i dowolnej rodziny odwzorowań liniowych $a_i : V_i \to U$ istnieje dokładnie jedno odwzorowanie $a_I : V_I \to U$ takie, że $a_I \circ i_i = a_i$.

Definicja 3. *Produktem* a. *iloczynem kartezjańskim* przestrzeni V i W nazwiemy przestrzeń $V \times W$ wraz z odwzorowaniami liniowymi $\pi_V : V \times W \to V$, $\pi_W : V \times W \to W$ takimi, że dla każdej przestrzeni liniowej U i każdej pary odwzorowań $a : U \to V$ i $b : U \to W$ istnieje dokładniej jedno odzworowanie $a \times b : U \to V \times W$ takie, że poniższy diagram jest przemienny

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "a"'] \arrow[d, dotted, "a \times b"] \arrow[dr, "b"] & \\ V & V \times W \arrow[l, "\pi_V"'] \arrow[r, "\pi_W"] & W \end{tikzcd} \tag{1}$$

Definicja 4. Podobnie, iloczynem kartezjańskim rodziny przestrzeni liniowych $\{V_i\}_{i \in I}$ nazwiemy przestrzeń $V^I = \prod_{i \in I} V_i$ wraz z odwzorowaniami $\pi_i : V_I \to V_i$ takimi, że dla każdej przestrzeni liniowej U i dowolnej rodziny odwzorowań liniowych $b_i : U \to V_i$ istnieje dokładnie jedno odwzorowanie $b_I : U \to V_I$ takie, że $\pi_i \circ b_I = b_i$.

Definicja 5. *Iloczynem tensorowym* przestrzeni V i W nazwiemy przestrzeń liniową $V \otimes W$ wraz z odwzorowaniem *dwuliniowym* $b : V \times W \to V \otimes W$ taką, że dla każdej formy dwuliniowej $A(v, w) : V \times W \to U$ o wartościach w przestrzeni liniowej U istnieje dokładnie jedno odwzorowanie *liniowe* $\tilde{A} : V \otimes W \to U$ takie że diagram jest przemienny:

(2)
$$
\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "b"] \arrow[d, "A"'] & V \otimes W \arrow[dl, dotted, "\tilde{A}"] \\
U &
\end{tikzcd}
$$

Definicja 6. *Iloczynem tensorowym* przestrzeni $V^{(1)}, \ldots, V^{(n)}$ nazwiemy przestrzeń liniową $V^{(1)} \otimes \ldots \otimes V^{(n)}$ wraz z odwzorowaniem $n-$*liniowym* $b_n : V^{(1)} \times \ldots \times V^{(n)} \to V^{(1)} \otimes \ldots \otimes V^{(n)}$ taką, że dla każdej formy $n-$liniowej $A(v_1, \ldots, v_n) : V^{(1)} \times \ldots \times V^{(n)} \to U$ o wartościach w przestrzeni liniowej U istnieje dokładnie jedno odwzorowanie *liniowe* $\tilde{A} : V^{(1)} \otimes \ldots \otimes V^{(n)} \to U$ takie że diagram analogiczny do 2 jest przemienny.

Definicja 7. $k-$krotnym *iloczynem zewnętrznym* a. *skośnym* przestrzeni V (lub $k-$tą potęgą zewnętrzną) nazwiemy przestrzeń liniową $\Lambda^k V$ wraz z odwzorowaniem $k-$*liniowym* $b : V \times \ldots \times V \to \Lambda^k V$ taką, że dla każdej formy $k-$liniowej *antysymetrycznej* $A(v_1, v_2, \ldots, v_n) : V \times \ldots \times V \to U$ o wartościach w przestrzeni liniowej U istnieje dokładnie jedno odwzorowanie *liniowe* $\tilde{A} : \Lambda^k V \to U$ takie że poniższy diagram (3) jest przemienny:

(3)
$$
\begin{tikzcd}
V \times \cdots \times V \arrow[r, "b"] \arrow[d, "A"'] & \Lambda^k V \arrow[dl, dotted, "\tilde{A}"] \\
U &
\end{tikzcd}
$$

Definicja 8. $k-$krotnym *iloczynem symetrycznym* przestrzeni V (lub $k-$tą potęgą symetryczną) nazwiemy przestrzeń liniową $Sym^k(V)$ wraz z odwzorowaniem $k-$*liniowym* $b : V \times \ldots \times V \to Sym^k(V)$ taką, że dla każdej formy $k-$liniowej *symetrycznej* $A(v_1, v_2, \ldots, v_n) : V \times \ldots \times V \to U$ o wartościach w przestrzeni liniowej U istnieje dokładnie jedno odwzorowanie *liniowe* $\tilde{A} : Sym^k(V) \to U$ takie że diagram (3) (z odpowiednimi zmianami) jest przemienny:

Definicja 9. Ustalamy konwencję, że $\Lambda^1 V = V$ i $Sym^1 V = V$.

2. Strzałkologia

Zadanie 2.1. Korzystając z Definicji 1 wykaż, że jeśli mamy odwzorowanie $a_V : V \to V'$ i $a_W : W \to W'$ to istnieje dokładnie jedno odwzorowanie $a_V \oplus a_W : V \oplus W \to V' \oplus W'$ takie, że następujący diagram jest przemienny:

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "i_v"] \arrow[d, "a_V"] & V \oplus W \arrow[d, dotted, "a_V \oplus a_W"] & W \arrow[l, "i_W"'] \arrow[d, "a_W"'] \\
V' \arrow[r, "i_{V'}"] & V' \oplus W' & W' \arrow[l, "i_{W'}"']
\end{tikzcd}
$$

Zadanie 2.2. Sformułuj i wykonaj zadanie 2.1 zamieniając sumę prostą dwóch przestrzeni

(a) iloczyn kartezjański dwóch przestrzeni. Stwórz przekształcenie $a_v \times a_W : V \times W \to V' \times W'$.
(b) iloczyn tensorowy dwóch przestrzeni.
(c) sumę prostą, iloczyn kartezjański i iloczyn tensorowy r przestrzeni $V^{(1)}, \ldots, V^{(r)}$.
(d) iloczyn zewnętrzny i iloczyn symetryczny.

ZADANIE 2.3. W terminach bazy e_i, f_j przestrzeni V i W opisz bazę przestrzeni $V \oplus W$, $V \times W$, $V \otimes W$, $\Lambda^2 V$, $\Lambda^k V$, $Sym^2(V)$, $Sym^k(V)$. Postaraj się, aby zwłaszcza w bazie przestrzeni $\Lambda^k V$ nie pojawiały się jakieś dodatkowe stałe.

ZADANIE 2.4. Wykaż, że $\Lambda^k V \subset V^{\otimes k}$ (ten ostatni napis oznacza $k-$krotne pomnożenie przez siebie przestrzeni V) oraz $Sym^k(V) \subset V^{\otimes k}$.

ZADANIE 2.5. Opisz odwzorowanie (podaj jawny wzór) $b : V \times W \to V \otimes W$ określone w definicji 5.

ZADANIE 2.6. Pokaż, że $V \otimes V = \Lambda^2 V \oplus Sym^2(V)$. Wykaż, że w przypadku wyższych iloczynów taka własność nie zachodzi.

ZADANIE 2.7. Niech $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$. Wykaż, że dla $\lambda \in \mathbb{R}$ element $\lambda \sum\limits_{\sigma \in \Sigma_n} v_{\sigma_1} \otimes v_{\sigma_2} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma_n}$ należy do $Sym^n(V)$ (Σ_n to grupa permutacji, $\sigma : (1, \ldots, n) \to (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$). Dobierz współczynnik λ tak, aby otrzymane odwzorowanie $V^{\otimes n} \to Sym^n(V)$ było rzutowaniem.

ZADANIE 2.8. Niech $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$. Wykaż, że dla $\lambda \in \mathbb{R}$ element $\lambda \sum\limits_{\sigma \in \Sigma_n} (-1)^{|\sigma|} v_{\sigma_1} \otimes v_{\sigma_2} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma_n}$ należy do $\Lambda^n(V)$ ($(-1)^{|\sigma|}$ jest znakiem permutacji). Dobierz współczynnik λ tak, aby otrzymane odwzorowanie $V^{\otimes n} \to \Lambda^n(V)$ było rzutowaniem.

ZADANIE 2.9. Niech $V = \mathbb{R}^2$, $V' = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$, $W' = \mathbb{R}$ i $a_V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oraz $a_W = (-1 \;\; 2)$ w standardowych bazach. Znajdź macierz przekształceń $a_V \oplus a_W$, $a_V \times a_W$, $a_V \otimes a_W$, $a_V \wedge a_V$, $a_W^2 : Sym^2(W) \to Sym^2(W')$ w bazach opisanych w zadaniu 2.3.

ZADANIE 2.10. Udowodnij, że $V^* \otimes V^*$ parametryzuje wszystkie formy dwuliniowe z V do $\mathbb{R}$. Przy tym $\Lambda^2 V^*$ parametryzuje formy antysymetryczne, zaś $Sym^2(V)$ — formy symetryczne.

ZADANIE 2.11. Wykaż, że $(V \otimes W)^* \simeq V^* \otimes W^*$. Ten izomorfizm nie opiera się wyłącznie na porównaniu wymiarów przestrzeni liniowych, to znaczy jest *kanoniczny* a. *funktorialny* a. *naturalny* (ilość określeń jest zastraszająca) w tym sensie, że jeśli mamy dwa odwzorowania liniowe $a_V : V \to V'$ i $a_W : W \to W'$ i dualne do nich $a_V^* : (V')^* \to V^*$, $a_W^* : (W')^* \to W^*$ to $(a_V \otimes a_W)^* = a_V^* \otimes a_W^*$.

ZADANIE 2.12. Określając izomorfizm z zadania 2.11 $i_{VW} : (V \otimes W)^* \simeq V^* \otimes W^*$ sformułuj warunek funktorialności poprzez narysowanie pewnego diagramu.

ZADANIE 2.13. Wykaż, że $V \otimes (V' \otimes V'') = (V \otimes V') \otimes V'' = V \otimes V' \otimes V''$.

ZADANIE 2.14. Udowodnij, że istnieje naturalne odwzorowanie dwuliniowe z $V^{\otimes k} \times V^{\otimes l} \to V^{\otimes (k+l)}$. Odwzorowanie to nazwiemy *mnożeniem tensorów przez siebie.*

ZADANIE 2.15. Wykaż, że $V \oplus W \simeq V \times W$. Czy istnieje kanoniczny izomorfizm między tymi przestrzeniami?

ZADANIE 2.16. Niech $L(V, W)$ będzie przestrzenią przekształceń liniowych z V do W. Wykaż, że istnieje izomorfizm $i_{VW} : L(V, W) \to V^* \otimes W$.

ZADANIE 2.17. Pokaż, że izomorfizm i_{VW} z zadania 2.16 jest kanoniczny, to znaczy dla odwzorowania $b_V : V' \to V$ i $a_W : W \to W'$ odwzorowania $i_{V'W}$ i $i_{VW'}$ są takie że następujący, skomplikowany diagram jest przemienny,

$$\begin{tikzcd}
L(V', W) & L(V, W) \arrow[l, "\tilde{b_V}"'] \arrow[r, "\tilde{a_W}"] \arrow[d, "i_{VW}"] & L(V, W') \\
(V')^* \otimes W \arrow[u, "i_{V'W}"] & V^* \otimes W \arrow[l, "{b_V}^* \otimes id_W"'] \arrow[r, "id_{V^*} \otimes a_W"] & V^* \otimes W' \arrow[from=1-3, "i_{VW'}"]
\end{tikzcd}$$

gdzie $\tilde{b}_V$ i $\tilde{a}_W$ są odwzorowaniami składania: jeśli dane jest $l = l(v) \in L(V, W)$, to $l' \in L(V', W)$ dane jest przez $l'(v') = l'(b_V(v'))$, a $l'' \in L(V, W')$ przez $l''(v) = a_W(l(v))$.

ZADANIE 2.18. Niech $V^{(1)}$, $V^{(2)}$ i W będą przestrzeniami liniowymi. Wykaż, że $(V^{(1)} \oplus V^{(2)}) \otimes W \simeq V^{(1)} \otimes W \,\oplus\, V^{(2)} \otimes W$, czyli mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

Zadanie 2.19. Niech $V^{(1)}$ i $V^{(2)}$ będą przestrzeniami liniowymi oraz $V = V^{(1)} \oplus V^{(2)}$. Wykaż, że $\Lambda^2 V \simeq \Lambda^2 V^{(1)} \oplus V^{(1)} \otimes V^{(2)} \oplus \Lambda^2 V^{(2)}$. Pokaż, że taka sama zależność zachodzi dla iloczynów symetrycznych.

Zadanie 2.20. Niech $V^{(1)}$, $V^{(2)}$ i V będą jak w zadaniu 2.19. Wyprowadź wzór na $\Lambda^n V$ oraz $Sym^n(V)$ analogiczny do 2.19..

Zadanie 2.21. Rozpatrzmy rodzinę przestrzeni liniowych jednowymiarowych $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Wykaż, że $\oplus_{n\in\mathbb{N}} V_n$ jest zbiorem ciągów $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, 0, \dots)$, które od pewnego miejsca są zerowe.

Zadanie 2.22. Rozpatrzmy rodzinę przestrzeni V_n z zadania 2.21. Wykaż, że $\prod_{n\in\mathbb{N}} V_n$ jest zbiorem wszystkich ciągów $(a_1, \dots, a_k, \dots)$, a więc jest istotnie różny od sumy prostej. Wskazówka: aby pokazać że dany ciąg a_n leży w produkcie, rozważ rodzinę odwzorowań $k_n : V_n \to \mathbb{R}$, $k_n(x) = a_n \cdot x$.

Zadanie 2.23. Wykaż, że dla dowolnej rodziny przestrzeni liniowych $V_{i i\in I}$ istnieje naturalne odwzorowanie $\oplus V_i \to \prod V_i$, którego jądro jest zerowe. Wskazówka: rozpatrz odwzorowania $id_i : V_i \to V_i$.

3. Macierzowe przedstawienie iloczynów tensorowych

Niektóre z tych zadań się powtarzają, różni się tylko sformułowanie. Nie należy się tym przejmować.

Zadanie 3.1. Wykaż, że iloczyn tensorowy przestrzeni V^* i W^* można przedstawić w postaci macierzowej, tak, że element $\phi_i \otimes \psi_j$ odpowiada macierzy M_{ij}, która ma na $(i,j)-$tym miejscu 1, a poza tym zera. (Ściśle: skonstruuj izomorfizm między $V^* \otimes W^*$ a przestrzenią macierzami $n \times m$.)

Zadanie 3.2. Rozpatrzmy $V^* \otimes V^*$ traktowane jako macierze (zob. zadanie 3.1). Jakim macierzom odpowiadają elementy $\Lambda^2 V^* \subset V^* \otimes V^*$ i $Sym^2(V^*)$?

Zadanie 3.3. Rozpatrzmy macierz $n \times m$. Wiadomo, że macierz taka zadaje odwzorowanie z V do W, co sugeruje, że macierz jest elementem z $L(V,W)$, czyli $V^* \otimes W$ (zob zadanie 2.16). Z drugiej strony macierz jest elementem $V^* \times W^*$ (zob. zadanie 3.1). Prześledź, w którym miejscu dokonywane jest tajne utożsamienie przestrzeni V z jej przestrzenią dualną V^*.

Zadanie 3.4. Skoro $L(V,W) = V^* \otimes W$, to $L(V,W)^* = W^* \otimes V$ (zobacz zadania 2.11 i 2.16). Jaką operacje zadaje przejście do przestrzeni dualnej na macierzach? (por. zadanie 3.1)

Zadanie 3.5. Niech $\{g_{ij}\}_{i=1,j=1}n, m$ będzie zbiorem liczb. Wykaż, że formuła $(v,w) \to \sum_{i=1,j=1}^{n,m} g_{ij} v_i w_j$ zadaje formę dwuliniową na przestrzeni $V \times W$ (oznaczenia jak na początku zadań). Jakiemu elementowi z $(V \otimes W)^*$ odpowiada ta forma?

Zadanie 3.6. Teraz niech E będzie przestrzenią liniową z bazą standardową $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$. Załóżmy, że $\{g_{ij}\}_{i=1,j=1}^{n,m}$ są elementami z E. Wykaż, że formuła $(v,w) \to \sum_{i=1,j=1}^{n,m} g_{ij} v_i w_j$ zadaje element z $(V \otimes W)^* \otimes E$ (takie coś nazywamy formą dwuliniową o wartościach w E).

Zadanie 3.7. Niech teraz oznaczenia takie, jak w zadaniu 3.6. Załóżmy, że $E = U^*$ dla pewnej przestrzeni U. Wykaż, że odwzorowanie $(v,w,u) \to \sum_{i=1,j=1}^{n,m} v_i w_j g_{ij}(u)$ zadaje element formę trójliniową na $V \times W \times U$ o wartościach w $\mathbb{R}$.

Zadanie 3.8. Niech oznaczenia takie, jak w 3.7. Rozpatrujemy odwzorowanie $(v,u) \to I(u,v) = \sum_{i=1,j=1}^{n,m} v_i g_{ij}(u) \psi_j$. Wykaż, to odwzorowanie zadaje formę *dwuliniową* na $U \times V$ o wartościach w W^*.

Zadanie 3.9. Analogicznie rozumując, jak w zadaniu 3.8 wykaż, że odwzorowanie $u \to J(u) = \sum_{i=1,j=1}^{n,m} g_{ij}(u) \phi_i \psi_j$ zadaje przekształcenie liniowe z U w $V^* \otimes W^*$.

Zadanie 3.10. Niech g_{ijk} będzie zbiorem liczb dla $i,j,k = 1,\ldots,n$. Wykaż, że przekształcenie $(v^1, v^2, v^3) \to \sum g_{ijk} v^1_i v^2_j v^3_k$ zadaje formę trójliniową na przestrzeni V. Znajdź element z $V^* \otimes V^* \otimes V^*$, który ona reprezentuje.

Zadanie 3.11. Sformułuj i udowodnij analog zadania 3.10 dla form $k-$liniowych

Zadanie 3.12. Sformułuj warunki na układ g_{ijk} z zadania 3.10 konieczne i dostateczne do tego, aby uzyskana forma była (a) — symetryczna, (b) — antysymetryczna.

Zadanie 3.13. Niech $g_{i_1,\ldots,i_k}$ zadaje $k-$formę (czyli formę $k-$liniową) na V. Wykaż, że analogicznie do zadania 3.8 dla $k_1 + k_2 = k$ na taką $k-$formę można patrzeć jak na formę k_1-liniową o wartościach w $(V^*)^{\otimes k_2}$. Na ile sposobów można taką formę wybrać?

Zadanie 3.14. Niech dane będą dwie formy $g_{i_1,\ldots,i_k}$, $h_{j_1,\ldots,j_l}$, $1 \leq i_a, j_b \leq m$ na W. Wykaż, że odwzorowanie $(w^{(1)},\ldots,w^{(k+l)}) \to \sum g_{i_1,\ldots,i_k} h_{j_1,\ldots,j_l} w^{(1)}_{i_1} \ldots w^{(k)}_{i_k} w^{(k+1)}_{j_1} \ldots w^{(k+l)}_{j_l}$ zadaje formę $(k+l)-$liniową na W. W ten sposób mamy odzworowanie $(W^*)^{\otimes k} \times (W^*)^{\otimes l} \to (W^*)^{\otimes (k+l)}$. Uzasadnij, że jest to to samo odwzorowanie, co w zadaniu 2.14 dla przestrzeni $V = W^*$.

4. Iloczyny antysymetryczne w $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^n$.

W tym rozdziale słowo forma *oznacza zawsze formę $k-$liniową antysymetryczną o wartościach w $\mathbb{R}$. Jest to konwencja niezgodna z ogólną terminologią w algebrze liniowej, a właściwa geometrii różniczkowej.*

Zadanie 4.1. Oblicz wymiar przestrzeni $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$. Jeśli e_1, e_2, e_3 są bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$, znajdź bazę $\Lambda^2\mathbb{R}^3$.

Zadanie 4.2. Niech $(v,w) \to v \times w$ będzie standardowym iloczynem wektorowym w $\mathbb{R}^3$. Wykaż, że jest to odwzorowanie dwuliniowe, antysymetryczne o wartościach w $\mathbb{R}^3$ (a więc element $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)^* \otimes \mathbb{R}^3$).

Zadanie 4.3. Wykaż, że dla dowolnego rzutowania $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ odwzorowanie $(v,w) \to \pi(v \times w)$ zadaje na $\mathbb{R}^3$ formę dwuliniową. Udowodnij, że dla każdej formy dwuliniowej $\omega(v,w)$ na $\mathbb{R}^3$ istnieje takie π, że $\omega(v,w) = \pi(v \times w)$.

Zadanie 4.4. Niech $v = (v_1, v_2, v_3)$. Rozpatrzmy $2-$formę $\omega_v = v_1\phi_2\wedge\phi_3 + v_2\phi_3\wedge\phi_1 + v_3\phi_1\wedge\phi_2$. Wykaż, że $\omega_v(u,w) = \det\begin{pmatrix} v \\ u \\ w \end{pmatrix}$, gdzie u, v, w zapisujemy jako wektory poziome.

Zadanie 4.5. Wykaż, że forma $\omega_v(u,w) = v \cdot (u \times w)$. W szczególności $\omega_v(u,w) = 0$ jeśli $v \in lin(u,w)$.

Zadanie 4.6. Uogólniamy wyniki na $\mathbb{R}^n$. Oblicz wymiar przestrzeni $\Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)^*$ i znajdź jej bazę.

Zadanie 4.7. Rozpatrujemy układ wektorów $v_2,\ldots,v_n \in \mathbb{R}^n$. Niech A (cóż za oryginalne oznaczenie!) będzie macierzą utworzoną przez te wektory, zaś A_k — wyznacznikiem macierzy $(n-1)\times(n-1)$ powstałej z A_k poprzez wykreślenie $k-$tego wiersza (lub kolumny, zależnie od tego czy wektory piszemy poziomo, czy pionowo). Wykaż, że odwzorowanie $I_n : (v_2,\ldots,v_n) \to (A_1,\ldots,A_n)$ jest formą $(n-1)-$liniową o wartościach w $\mathbb{R}^n$. To odwzorowanie nazwiemy dalej *$n-$wymiarowym iloczynem wektorowym.*

Zadanie 4.8. Wykaż, że dla dowolnego rzutowania $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wielkość $\pi \circ I_n$ zadaje formę $(n-1)-$liniową na $\mathbb{R}^n$. Ponadto każda forma $(n-1)-$liniowa na $\mathbb{R}^n$ powstaje w ten właśnie sposób (zob 4.3).

Zadanie 4.9. Niech $u = (u_1,\ldots,u_n)$. Rozpatrzmy odwzorowanie $\omega_u(v_2,\ldots,v_n) = \det\begin{pmatrix} u \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. Wykaż, że jest to forma $(n-1)-$liniowa na wektorach $(v_2,\ldots,v_n)$ i jest ona równa $u \cdot I_n(v_2,\ldots,v_n)$ (I_n zostało określone w zadaniu 4.7). Pokaż, że ω_u znika, jeśli $u \in lin(v_2,\ldots,v_n)$.

Zadanie 4.10. Zapisz formę ω_u w bazie przestrzeni $\Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)^*$. *Uwaga!* Proste uogólnienie zapisu z zadania 4.4 nie pracuje dla n parzystego. Wyjaśnij, dlaczego?

ZADANIE 4.11. Rozpatrzmy rosnący zbiór indeksów $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$. Dla układu wektorów $v^{(1)}, \ldots, v^{(k)}$ określamy $\omega_{i_1,\ldots,i_k}(v_1, \ldots, v_k)$ jako wyznacznik macierzy $\{v_{i_b}^{(a)}\}_{a,b=1}^{k}$. Wykaż, że $\omega_{i_1,\ldots,i_k}$ zadają formę $k-$liniową antysymetryczną na przestrzeni $V \simeq \mathbb{R}^n$. Udowodnij, że wszystkie tak uzyskane formy stanowią bazę przestrzeni $\Lambda^k V^*$. Porównaj tę bazę z bazą znalezioną w zadaniu 2.3.

5. Algebra symetryczna i zewnętrzna

ZADANIE 5.1. Rozpatrzmy dwa elementy $\omega_1 \in \Lambda^k W$ i $\omega_2 \in \Lambda^l W$. Rozpatrujemy element $a(\omega_1, \omega_2)$ określony następująco: najpierw bierzemy $\omega_1 \cdot \omega_2 \in W^{\otimes(k+l)}$ (zobacz zadania 2.14 i 3.14). Następnie bierzemy rzutowanie z $W^{\otimes(k+l)}$ na $\Lambda^{k+l} W$. Wykaż, że $a(\omega_1, \omega_2)$ jest dwuliniowe.

ZADANIE 5.2. Niech $a(\omega_1, \omega_2)$ będzie takie jak w zadaniu 5.1 oraz $W = V^*$ dla pewnego W. Wykaż, że istnieje takie uniwersalne $\lambda = \lambda(k, l) \in \mathbb{R}$, niezależne w szczególności od V takie, że dla dowolnego ciągu $1 \leq i_1 < \cdots < i_{k+l} len$ zachodzi $\lambda a(\omega_{i_1,dots,i_k}, \omega_{i_{k+1},\ldots,i_{k+l}}) = \omega_{i_1,\ldots,i_{k+l}}$ (definicje w zadaniu 4.11). Odwzorowanie $(\omega_1, \omega_2) \to \lambda a(\omega_1, \omega_2)$ nazwiemy *iloczynem zewnętrznym* i oznaczymy przez $\omega_1 \wedge \omega_2$.

ZADANIE 5.3. Zapisz iloczyn zewnętrzny w bazie z zadania 2.3.

ZADANIE 5.4. Pokaż, że iloczyn zewnętrzny jest łączny, tj. $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$.

ZADANIE 5.5. Udowodnij, że dla elementów z $\Lambda^1 W$: ω_1 i ω_2 mamy $\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1$.

ZADANIE 5.6. Wykaż, że iloczyn dwóch dowolnych elementów z $\Lambda^k W$ i $\Lambda^l W$ k i l nieparzystego jest antyprzemienny, tj. $\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1$.

ZADANIE 5.7. Niech $\omega_1 \in \Lambda^k V$, $\omega_2 \in \Lambda^l V$. Wykaż, że $\omega_1 \wedge \omega_2 = \pm\omega_2 \wedge \omega_1$ i znajdź znak w zależności od k i l.

ZADANIE 5.8. Dla dwóch elementów $x_1 \in Sym^k W$, $x_2 \in Sym^l W$ określamy ich iloczyn analogicznie jak w zadaniu 5.1: najpierw bierzemy $x_1 \cdot x_2 \in W^{\otimes(k+l)}$ a następnie rzutujemy go na Sym^{k+l}. Uzyskany w ten sposób element $b(x_1, x_2)$ wymnażamy przez stałą $\lambda(k, l)$ określoną w 5.2. W ten sposób otrzymujemy element $x_1 x_2$. Wykaż, że $x_1 x_2$ zależy liniowo od x_1 i x_2.

ZADANIE 5.9. Udowodnij, że mnożenie symetryczne jest łączne i przemienne.

ZADANIE 5.10. Wykaż, że dla dwóch elementów z bazy przestrzeni odpowiednio $Sym^k W$ i $Sym^l W$ ich iloczyn jest elementem bazy $Sym^{k+l} W$ (bazę bierzemy z zadania 2.3.

ZADANIE 5.11. Udowodnij, że każdy element z bazy $Sym^{k+l} W$ może zostać zapisany jako iloczyn pewnego elementu z bazy $Sym^k W$ i $Sym^l W$.

ZADANIE 5.12. Wykaż, że przestrzeń $Sym^k W$ izomorficzna z przestrzenią wielomianów jednorodnych stopnia k od współrzędnych $f_1, \ldots, f_m$. Przy tym utożsamieniu odwzorowanie $Sym^k W \times Sym^l W \to Sym^{k+l} W$ jest po prostu mnożeniem wielomianów.

ZADANIE 5.13. Rozpatrzmy zbiór $\mathbf{Sym} W \stackrel{def}{=} \oplus_{k \geq 0} Sym^k W$, gdzie przyjmujemy $Sym^0 W \equiv \mathbb{R}$. Udowodnij, że **Sym** jest izomorficzny jako pierścień i jako przestrzeń liniowa z przestrzenią wielomianów $\mathbb{R}[f_1, \ldots, f_m]$.