Formy objętości na zbiorach postaci $F = 0$.

Niech $M = \{f = 0\}$ będzie rozmaitością w $\mathbb{R}^n$, gdzie o n na razie nie zakładamy, czy jest parzyste, czy nie. Załóżmy, że ∇f nie znika w żadnym punkcie M. Niech $p \in M$, zaś $v^{(1)}, \ldots, v^{(n-1)}$ będą wektorami stycznymi do M w punkcie p. Mamy

$$(1)\quad AF = \begin{vmatrix} f'_{x_1} & f'_{x_2} & \ldots & f'_{x_n} \\ v_1^{(1)} & v_2^{(1)} & \ldots & v_n^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_1^{(n-1)} & v_2^{(n-1)} & \ldots & v_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = f'_{x_1} \begin{vmatrix} v_2^{(1)} & \ldots & v_n^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ v_2^{(n-1)} & \ldots & v_n^{(n-1)} \end{vmatrix} -$$

$$- f'_{x_2} \begin{vmatrix} v_1^{(1)} & v_3^{(1)} & \ldots & v_n^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_1^{(n-1)} & v_3^{(n-1)} & \ldots & v_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \cdots \pm f'_{x_n} \begin{vmatrix} v_1^{(1)} & \ldots & v_{n-1}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ v_1^{(n-1)} & \ldots & v_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

gdzie $v_k^{(i)}$ oznacza $k-$tą współrzędną wektora $v^{(i)}$. Zauważmy teraz, że macierz

$$\begin{vmatrix} v_1^{(1)} & \ldots & v_{i-1}^{(1)} & v_{i+1}^{(1)} & \ldots & v_n^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_1^{(n-1)} & \ldots & v_{i-1}^{(n-1)} & v_{i+1}^{(n-1)} & \ldots & v_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

jest równa wartości formy $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$ na układzie wektorów $v^{(1)}, \ldots, v^{(n-1)}$.

Zauważmy teraz, że jeśli wektory $v^{(i)}$ tworzą bazę ortonormalną przestrzeni stycznej, to są one do siebie wzajemnie prostopadłe, oraz są prostopadłe do wektora ∇f. A zatem wyznacznik macierzy AF ma wartość równą długości wektora ∇f. Czyli, reasumując forma

$$\omega_f = \frac{1}{||\nabla f||}\left(f'_{x_1} dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n - f'_{x_2} dx_1 \wedge dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_n + \cdots \pm f'_{x_n} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}\right)$$

na układzie ortonormalnym wektorów $v^{(1)}, \ldots, v^{(n-1)}$ przyjmuje wartość równą 1 (lub -1 zależnie od orientacji). Jest to więc forma objętości. Do tej pory nie zakładaliśmy nic o parzystości n. Dopiero przestawianie wyrazów może zależeć od n. Opisuje to poniższy

Lemat 1. Permutacja $I_n : \{1, \ldots, n\} \to \{2, 3, \ldots, n, 1\}$ jest parzysta dla n nieparzystego i nieparzysta dla n parzystego.

Dowód. Zauważmy, że I_n^n jest identycznością. Przyjmijmy, że n jest nieparzysta oraz I_n jest nieparzysta. Wtedy I_n^n też jest nieparzysta, bo jest złożeniem nieparzystej liczby permutacji nieparzystych. Ale identyczność jest permutacją parzystą. Sprzeczność. I_n jest parzysta dla n nieparzystego.

Rozpatrzmy teraz n parzyste i weźmy sobie I_{n-1} działające na zbiorze n elementowym tak, że zostawia pierwszy element, $I_{n-1} : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 3, 4, \ldots, n, 2\}$. Taka permutacja jest parzysta na mocy tego, co było udowodnione. Ale różni się ona od I_n tylko o zamianę jedynki z dwójką, a więc o permutację nieparzystą. Więc, dla n parzystych, I_n jest nieparzysta. $\square$

Skoro $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n = \operatorname{sgn}(I_{n-1}^{i-1}) dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1}$, otrzymujemy, że forma objętości ma postać

$$\begin{cases} \frac{1}{||\nabla f||}\left(f'_{x_1} dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n + f'_{x_2} dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_1 + \cdots + f'_{x_n} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}\right) & 2 \nmid n \\ \frac{1}{||\nabla f||}\left(f'_{x_1} dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n - f'_{x_2} dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_1 + \cdots - f'_{x_n} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}\right) & 2 | n \end{cases}$$

Rozważmy teraz nasz przykład $f(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1$. Wtedy $\frac{1}{||\nabla f||} = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}}$. Czyli

$$\omega_f = \frac{x_1 dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \pm x_2 dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_2 + \cdots \pm x_n dx_1 \ldots dx_{n-1}}{\sqrt{x_1^2{}_1 + \cdots + x_n^2}},$$

gdzie $\pm$ przyjmuje wartość zawsze „+” dla n nieparzystego i „−” dla n parzystego. Znak „−” występuje przy tym tylko w wyrazach, w których opuszczony jest parzysty indeks dx_k.

Policzmy teraz $d\omega_f$. Zauważmy, że

$$d\frac{1}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}} = -\frac{1}{(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{3/2}}(x_1dx_1+\cdots+x_ndx_n).$$

Z drugiej strony

$$d(x_1dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n \pm x_2dx_3\wedge\cdots\wedge dx_2+\cdots\pm x_ndx_1\dots dx_{n-1}) = ndx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$$

Istotnie, wyraz $\pm dx_i\wedge dx_{i+1}\wedge\cdots\wedge dx_{i-1}$ po przepermutowaniu zawsze będzie miał znak „+”. Zmiana znaku przy permutacji następuje wyłącznie dla parzystych n i parzystych i, czyli akurat wtedy, gdy pojawia się znak „−”.

Stąd, po niewielu przekształceniach uzyskujemy:

$$d\omega_f = (n-1)\frac{1}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n.$$

Czyli ω_f jest zamknięta dla $n=1$. Nie stanowi to, wbrew wcześniejszym sugestiom, sprzeczności z twierdzeniem Stokesa. Nie możemy bowiem użyć tw. Stokesa, gdyż ω_f nie jest określona w zerze.

Zauważmy, że $\int_{||x||=R}\omega_f$ rośnie wraz R jak R^{n-1}. Istotnie, forma jest niezmiennicza ze względu na skalowanie. Sugeruje to, że następująca forma:

$$\omega_n = \frac{x_1dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n \pm x_2dx_3\wedge\cdots\wedge dx_2+\cdots\pm x_ndx_1\dots dx_{n-1}}{(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{n/2}}$$

jest zamknięta. Tak też się okazuje być w rzeczywistości. Zauważmy, że po obcięciu do sfery o promieniu R forma $\omega_n = R^{1-n}\omega_f$.

Zamkniętość formy ω_n nie kłóci się z twierdzeniem Stokesa. Fakt, że $d\omega_n = 0$ poza punktem $(0,0,\dots,0)$ można wykorzystać do dowodu twierdzenia Brouwera.

TWIERDZENIE 1 (Brouwera o punkcie stałym). Nie istnieje takie przekształcenie $n-$wymiarowej kuli na jej brzeg, które byłoby identycznością na brzegu.

Dowód. Rozpoczęcie. Niech $B=\{x_1^2+\cdots+x_n^2\leq 1\}$ i $S=\{x_1^2+\cdots+x_n^2=1\}=\partial B$. Załóżmy, że istnieje $f:B\to S$ takie, że f jest identycznością na S. Niech ω_n będzie zdefiniowaną wyżej formą na S. Wtedy $\int_S\omega=\int_S f^*\omega$, bo f jest identycznością na sferze. $f^*\omega_n$ jest określona na całym $B=f^{-1}(S)$, dlatego, że f jest na S. Teraz wystarczy skorzystać z twierdzenia Stokesa i pokazać, że $\int_S\omega_n=0$, co jest sprzecznością. $\square$

Tego zadania **nie** będzie na kolokwium.