Zadania z funkcji gamma.

wersja 1.0.β z 22 grudnia 2006

Maciej Borodzik

Rozpatrzmy całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx, \tag{1}$$

gdzie P i Q są wielomianami.

Zadanie 1. *Całka* (1) *jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy* $\deg Q - \deg P \geq 2$ *oraz* $\forall x_\lambda \in Q^{-1}(0)$, $x_\lambda = \alpha_\lambda + i\beta_\lambda$ *i* $\beta_\lambda \neq 0$.

Uwaga 1. *Jeśli dziedzina jest symetryczna, można czasami rozpatrywać całkę typu* (1) *w ogólniejszym przypadku, mówiąc, że jest ona zbieżna wtedy, gdy istnieje granica* $\lim_{h\to\infty} \int_{-h}^{h} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$. *Daje to o wiele szerszą klasę całek, którymi się nie będziemy zajmowali.*

Zadanie 2. *Funkcja wymierna* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *daje się rozłożyć w ułamki proste*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{x_\lambda : Q(x_\lambda)=0} \left(\frac{A_\lambda}{x - x_\lambda} + \frac{A_\lambda^{(2)}}{(x - x_)\lambda^2} + \cdots + \frac{A^{(n_\lambda)}}{(x - x_\lambda)^{n_\lambda}} \right), \tag{2}$$

gdzie suma przebiega przez wszystkie pierwiastki wielomianu Q, n_λ *jest krotnością i* A *są zespolone. Wykaż, że rozkład jest jednoznaczny. Ponadto, jeśli całka* (1) *jest zbieżna, to* $\sum A_\lambda = 0$.

Wskazówka 1. *Rozpatrz* $\lim xP(x)/Q(x)$ *przy* $x \to \infty$

Zadanie 3. *Wykaż, że całka* (1) *zależy tylko od* A_λ, *a nie zależy od* $A_\lambda^{(k)}$.

Mamy następujący wzór, którego nie będziemy dowodzić.

$$\int_{-h}^{h} \frac{1}{x - x_\lambda} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{(h - a_\lambda)^2 + b_\lambda^2}{(h + a_\lambda)^2 + b_\lambda} + i \left[\operatorname{arc\,tan} \frac{h - a_\lambda}{b_\lambda} + \operatorname{arc\,tan} \frac{h + a_\lambda}{b_\lambda} \right]. \tag{3}$$

Zadanie 4. *Wykaż, że granica przy* $h \to \infty$ *wyrażenia w* (3) *wynosi* $\pm i\pi$, *gdzie znak jest dodatni wtedy, gdy* $b_\lambda > 0$.

Zadanie 5. *Udowodnij, że całka* (1) *jest równa* $2\pi i \sum A_\lambda^{(+)}$, *gdzie suma przebiega wyłącznie po pierwiastkach* x_λ *takich, że* $\Im x_\lambda > 0$.

Zadanie 6. *Załóżmy, że* $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_\lambda}{x - x_\lambda} + R(x)$. *Wykaż, że* $A_\lambda = \frac{P(x_\lambda)}{Q'(x_\lambda)}$.

Wskazówka 2. *Należy odpowiednio przekształcić powyższy wzór i wziąć granicę przy* $x \to x_\lambda$. *Alternatywnie rozwijamy* Q *w Taylora.*

Zadanie 7. *Oblicz*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}} dx, \tag{4}$$

gdy $n > m$.

Zadanie 8. *Korzystając z całki* (4), *oblicz*

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1 + x} dx, \tag{5}$$

gdy $0 < a < 1$.

Wskazówka 3. *Najpierw podstaw* $z = x^{1/2n}$ *i* $a = \frac{2m+1}{2n}$. *Następnie skorzystaj z ciągłości całki w zależności od* a.

Definicja 1. *Niech* $a, b > 0$. *Wielkość*

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \tag{6}$$

nazywamy funkcją beta Eulera *i oznaczamy* $B(a,b)$.

Zadanie 9. *Wykaż, że* $B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1)$.

Zadanie 10. *Niech* $n \in \mathbb{N}$. *Oblicz* $B(a,n)$.

Zadanie 11. *Oblicz* $B(a, 1-a)$.

Wskazówka 4. *Podstaw* $x = \frac{y}{1+y}$.

Zadanie 12. *Oblicz korzystając z funkcji* B

$$\int_0^\pi \cos^n x \sin^m x \, dx$$

Definicja 2. *Niech* $a > 0$ *wtedy całkę*

$$\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx \tag{7}$$

nazywamy funkcją Gamma Eulera *i oznaczamy przez* $\Gamma(a)$.

Zadanie 13. *Wykaż, że* $\Gamma(a)$ *i* $B(a,b)$ *są gładkie (klasy* C^∞*). Udowodnij, że* Γ *jest wypukła.*

Zadanie 14. *Sprawdź, że* $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.

Zadanie 15. *Wykaż, że*

$$\Gamma(a) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{z}\right)^{a-1} dz.$$

Zadanie 16. *Uzasadnij, że*

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} n^{a-1} \int_0^1 (1 - z^{1/n})^{a-1}dz.$$

Zadanie 17. *Wywnioskuj, że*

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} n^a \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)}{a(a+1)\dots(a+n-1)}.$$

Zadanie 18. *Wykaż, że powyższy ciąg, traktowany jako funkcje od* a *zbiega do* $\Gamma(a)$ *niemal jednostajnie.*

Zadanie 19. *Wywnioskuj, że* $(\ln \Gamma(a))'|_{a=1} = -C$, *gdzie* C *jest stałą Eulera.*

Zadanie 20. *Niech* $f : 0 \to \infty$ *monotoniczna i* $\int_0^\infty f(x)dx$ *istnieje. Wykaż, że*

$$\lim_{h\to 0} h(f(h) + f(2h) + f(3h) + \dots) = \int_0^\infty f(x)dx.$$

Zadanie 21. *Wykaż, że dla* $\alpha > 0$

$$\lim_{t\to 1^-} \sqrt[\alpha]{1-t}(1 + t^{1^\alpha} + t^{2^\alpha} + t^{3^\alpha} + \dots + t^{n^\alpha} + \dots) = \frac{1}{\alpha}\Gamma(\alpha).$$

Wskazówka 5. *Rozpatrz* $f(x) = e^{-x^\alpha}$. *Całkę z* f *sprowadź do* Γ *przez* $e^{-x^\alpha} = t$.

Zadanie 22. *Oblicz* $\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}dy$. *Wywnioskuj stąd, że*

$$\Gamma(a+b)\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt = \int_0^\infty t^{a-1}\left(\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}dy\right)dt.$$

Wykaż, teraz, że

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Korzystając z tego, oblicz $\Gamma(a)\Gamma(1-a)$. *(formuła dopełnienia)*

Wskazówka 6. *W powyższym wzorze raz skorzystaj z zamiany z zadania 11. Oraz oczywiście zamiana kolejności całkowania.*

Zadanie 23. *Niech* $E_n = \Gamma(\frac{1}{n})\Gamma(\frac{2}{n})\dots\Gamma(\frac{n-1}{n})$. *Oblicz* E_n^2.

Zadanie 24. *Posługując się, w razie potrzeby, poprzednim zadaniem oblicz*

$$\int_0^1 \ln\Gamma(x)dx. \tag{8}$$

Zadanie 25. *Oblicz całkę* (8) *korzystając wyłącznie z formuły dopełnienia.*

Wskazówka 7. *Zamiana* $x \to y = 1-x$.

Zadanie 26. *Podobnie, jak w poprzednim zadaniu oblicz całkę*

$$\int_0^1 \cos(2n\pi x)\ln\Gamma(x)dx.$$

Zadanie 27. *Dla* $|c|<1$ *oblicz* $\int_0^{\pi/2}\tan^c x dx$.

Zadanie 28. *Wykaż, że* $\lim_{b\to 0}[\Gamma(b) - B(a,b)] = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$.

Zadanie 29. *Udowodnij, że*

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^\infty \left[e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a}\right]\frac{dx}{x}. \tag{9}$$

Zadanie 30. *Wywnioskuj, że* $C = \int_0^\infty [\frac{1}{1+x} - e^{-x}]dx$.

Zadanie 31. *Zauważ zatem, że*

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + C = \int_0^1 \left[\frac{1-t^{a-1}}{1-t}\right]dt. \tag{10}$$

Wskazówka 8. *Odejmij wzór* (9) *dla* a *i dla* $a=1$. *Podstaw* $t = \frac{1}{1+x}$.

Zadanie 32. *Rozwiń funkcję podcałkową w* (10). *Udowodnij następujące wzory*

$$\frac{d}{da}\ln\Gamma(a) + C = \sum_{\nu=0}^\infty\left(\frac{1}{1+\nu} - \frac{1}{a+\nu}\right),$$

$$\frac{d^2}{da^2}\ln\Gamma(a) = \sum_{\nu=0}^\infty \frac{1}{(a+\nu)^2}.$$

w szczególności $(\ln\Gamma(a))''|_{a=1} = \frac{\pi^2}{6}$.

Zadanie 33. *Korzystając z tego, że* $1+q+q^2+\dots+q^n+\dots = \frac{1}{1-q}$ *wykaż, że*

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1} = \Gamma(s)\zeta(s),$$

gdzie ζ *jest funkcją dzeta Riemanna.*

Wskazówka 9. $\frac{1}{s-1} = \Gamma(s-1)/\Gamma(s)$.

Zadanie 34. *W szczególności wykaż, że*

$$\lim_{s\to 1^+}(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}) = C.$$

Zadanie 35. *Wykaż, że*

$$\int_0^\infty e^{-x}\ln x dx = -C,$$

$$\int_0^1 \ln(-\ln u) du = -C.$$

Zadanie 36. *Niech* $a_1, \ldots, a_p > 0$, *a* $S = \{(x_1, \ldots, x_{p_1}) \in \mathbb{R}^{p-1} : x_i \geq 0, \sum x_i \leq 1\}$. *Wykaż, że*

$$\int \cdots \int_S x_1^{a_1-1} x_2^{a_2-1} \ldots x_{p-1}^{a_{p-1}-1}(1 - x_1 - \cdots - x_{p-1})^{a_p-1} = \frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\ldots\Gamma(a_p)}{\Gamma(a_1 + \cdots + a_p)}.$$

Zadanie 37. *Wiedząc, że* $\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^\infty t^{m-1}e^{-xt}dt$ *oblicz dla* $0 < m < 1$*:*

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^m} dx$$