Dziewiąty zestaw zadań z Analizy II*.

Termin oddania 16 maja 2008

Zadanie 1 (Algebra funkcji.)**.** Niech M będzie rozmaitością zwartą. Zauważ (nie trzeba tego pisać w zadaniu), że $C(M)$ i $C^\infty(M)$ (przestrzeń funkcji ciągłych i, odpowiednio, gładkich) mają strukturę algebry przemiennej (tzn. przestrzeń liniowa i pierścień jednocześnie). Rozważmy $x \in M$ oraz $\mathfrak{m}$ ideał w $C(M)$ i $C^\infty(M)$ składający się z funkcji zerujących się w x.

Dla przypomnienia: dla pierścienia R ideał $I \subset R$ to taka podgrupa względem dodawania, że dla wszystkich $r \in R$, $i \in I$ zachodzi $r \cdot i \in I$. Ideał jest maksymalny *jeśli nie zawiera się w żadnym większym ideale, poza R. Dla przykładu liczby parzyste tworzą ideał (maksymalny) w $\mathbb{Z}$.*

(a) Wykaż, że $\mathfrak{m}$ jest ideałem maksymalnym zarówno w $C(M)$, jak i $C^\infty(M)$.

(b) Wykaż, że $\mathfrak{m} \subset C^\infty(M)$ jest skończenie generowany. To znaczy, istnieje skończony podzbiór $\{f_1, \dots, f_s\}$ taki, że

$$\forall g \in \mathfrak{m}, \quad \exists r_1, \dots, r_s \in C^\infty(M) \colon g = \sum_{k=1}^{s} f_k r_k.$$

(c) Udowodnij, że w $C(M)$ zachodzi $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$. Tutaj $\mathfrak{m}^2$ oznacza przestrzeń liniową rozpiętą przez elementy postaci $f \cdot g$ dla $f, g \in \mathfrak{m}$.

(d) Wykaż, że $\mathfrak{m} \subset C(M)$ *nie* jest skończenie generowany.

(e) Udowodnij, że w $C^\infty(M)$ zachodzi $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ jest skończenie wymiarowe i izomorficzne z przestrzenią $T^*_y M$.

Zadanie 2 (Algebra Banacha)**.** Niech B będzie przemienną algebrą Banacha. Oznacza to, że B ma następujące własności

(1) B jest zespoloną przestrzenią Banacha.

(2) W B mamy strukturę mnożenia przemiennego, to znaczy, dla $x, y \in B$ można określić $x \cdot y \in B$, przy czym $||x \cdot y|| \leq ||x|| \cdot ||y||$ oraz mnożenie spełnia zwykłe aksjomaty rozdzielności.

(3) Mnożenie ma jedynkę, czyli $\exists e \in B : x \cdot e = x$.

Można myśleć o B na przykład jak o algebrze funkcji ciągłych na jakiejś przestrzeni topologicznej.

Określamy $\mathcal{M}$ jako zbiór ideałów maksymalnych B. Niech $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}$ będzie takim ideałem oraz $x \in B$.

(0)* Wykaż, że przestrzeń ilorazowa B/m jest izometryczna z $\mathbb{C}$. *Wskazówka: dla elementu $x \in B/\mathfrak{m}$ rozpatrujemy zbiór $\sigma(x)$ tych $\lambda \in C$, że $x - \lambda \cdot e$ jest nieodwracalny. Wykaż, że $\sigma(x)$ jest zwarty i niepusty a potem pokaż, że jeśli $\lambda_0 \in \partial\sigma(x)$, to $x - \lambda_0 \cdot e$ jest dzielnikiem zera w B/m. Cf. Dunford–Schwarz t.2, Twierdzenie IX.1.6.*

(a) Udowodnij, że istnieje taki $y \in \mathbb{C}$ taki, że
$$x + \mathfrak{m} = y \cdot e + \mathfrak{m},$$
co należy rozumieć, że dla dowolnego $m_1 \in \mathfrak{m}$ element $x + m_1 - y \cdot e$ należy do $\mathfrak{m}$.

Ten y będzie dalej oznaczany jako $x(\mathfrak{m})$.

(b) Wykaż, że istnieje odpowiedniość 1—1 między elementami $\mathcal{M}$ a homomorfizmami między B a $\mathbb{C}$.

(c) Wykaż, że $|x(\mathfrak{m})| \leq ||x||$.

Zadanie 3 (Spektrum algebry)**.** Niech B będzie algebrą Banacha nad $\mathbb{C}$. W zbiorze $\mathcal{M}$ wprowadzamy topologię przez zadanie następującej rodziny zbiorów otwartych
$$U(\mathfrak{m}_0, \varepsilon, A) = \{\mathfrak{m} \in \mathcal{M} \colon \forall x \in A, |x(\mathfrak{m}) - x(\mathfrak{m}_0)| < \varepsilon\},$$
gdzie A jest zbiorem skończonym.

Udowodnij, że dla dowolnego $x \in B$ funkcja $\mathfrak{m} \to x(\mathfrak{m})$ jest ciagła.

Zadanie 4 (Zwartość spektrum)**.** Wykaż, że zbiór $\mathcal{M}$ z topologią zadaną w zadaniu 3 jest zwarty.

Wskazówka: zrealizuj go jako podzbiór domknięty dysków D_x, $D_x = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq ||x||\}$, gdzie x przebiega wszystkie elementy z B, czyli zastosuj argumentację typu twierdzenie Alaoglu.

Zadanie 5 (Homomorfizm)**.** Niech B będzie algebrą Banacha taką, że jeśli $x(\mathfrak{m}) = 0$ dla wszystkich $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}$, to $x = 0$ w B (*czyli B jest półprosta*). Wykaż, że w takim razie B jest izomorficzna z algebrą funkcji ciągłych $C(\mathcal{M})$. Izomorfizm jest zadany przez $x \to x()$.

Zadanie 6 (Uzwarcenie Čecha-Stone'a)**.** Niech X będzie przestrzenią spełniającą aksjomat rozdzielania $T_{3\frac{1}{2}}$, czyli dla punktu $x \in X$ i zbioru domkniętego $A \subset X$, $x \notin A$ istnieje funkcja ciągła f zerująca się w A taka, że $f(x) = 1$.

(a) Zauważ, że $B = C(X, \mathbb{C})$ jest algebrą Banacha.

(b) Zauważ, że B jest izomorficzne algebrą $C(Y)$ dla pewnej przestrzeni zwartej Y. (Homomorfizm z zadania 5.)

(c) Udowodnij, że X wkłada się w Y jako podzbiór gęsty, czyli Y jest uzwarceniem X.

(d) Wykaż, że każda funkcja ciągła na X przedłuża się do funkcji ciągłej na Y.

(e) Uzasadnij, że jeśli Z jest innym uzwarceniem X to istnieje ciągła suriekcja $\pi : Y \to Z$, identycznościowe na X. Czyli Y jest maksymalnym uzwarceniem.

Zadanie 7 (Inne uzwarcenia)**.** Niech dane będą liczby rzeczywiste $\{a_1, \ldots, a_n\}$ parami niewspółmierne. Znajdź najmniejszy zbiór zwarty Y zawierający prostą rzeczywistą $\mathbb{R}$ jako zbiór gęsty o tej własności, że każda funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, okresowa o okresie a_i przedłuża się do funkcji ciągłej na Y.

Maciej Borodzik