Ósmy zestaw zadań z Analizy II*.

Termin oddania 25 kwietnia 2008

Zadanie 1 (Transwersalność cd)**.** Niech $B = \mathbb{R}^m$ będzie podprzestrzenią $M = \mathbb{R}^{n+m}$. Niech $\pi : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ będzie rzutem ortogonalnym wzdłuż B. Niech $A = \mathbb{R}^n$ oraz $f : A \to M$ będzie gładkie.

Powiemy, że punkt $x_0 \in B$ jest *prostym punktem nietranswersalności* f, jeśli istnieje taki $y \in A$, że $f(y) = x_0$, a gdy położymy $g(y) = \pi(f(y))$, to

$$\dim \ker Dg(y) = 1,$$

oraz jeśli $v \in \ker Dg(y)$ to $\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \neq 0$.

Naśladując dowód twierdzenia o transwersalności **wykaż** następujący fakt. *Jeśli A oraz $B \subset M$ są zwarte oraz dana jest rodzina f_t, $t \in [0,1]$ odwzorowań gładkich z A do M, to istnieje taka rodzina $g_t : A \to M$, dowolnie bliska f_t oraz zbiór skończony $T = \{t_1, \dots, t_k\}$ taki, że dla $t \notin T$ $g_t \pitchfork B$ zaś dla $t \in T$ odwzorowanie g_t jest transwersalne do B poza skończoną ilością punktów które są prostymi punktami nietranswersalności.*

Wskazówki:

(1) Zastosuj twierdzenie o transwersalności do odwzorowania $F : A \times [0,1] \to M$.
(2) Jeśli $G : A \times [0,1] \to M$ jest transwersalne do B, to prawie zawsze $g_t \pitchfork B$.
(3) Jeśli $g_t \not\pitchfork B$, można zaburzać G przekształceniem liniowym (a nie tylko stałym) tam, gdzie nie ma transwersalności.
(4) W skrajnym wypadku zajrzyj do książki Arnolda do rozdziału o silnym twierdzeniu o transwersalności. Ale łatwiej samemu wymyślić, niż zrozumieć.

Zadanie 2 (Indeks przecięcia, część I)**.** Niech $B = \mathbb{R}^m$, $M = \mathbb{R}^{n+m}$ i $A = \mathbb{R}^n$. Określamy π tak jak w zadaniu 1. Załóżmy, że dana jest rodzina odwzorowań gładkich $f_t : A \to M$, parametryzowana zbiorem $[0,1]$ spełniająca następujące warunki

(a) Dla każdego $t \in [0,1]$ zbiór $f_t(A) \cap B$ jest skończony.
(b) Dla $t \neq \frac{1}{2}$ $f_t \pitchfork B$.
(c) Dla $t = \frac{1}{2}$ istnieje dokładnie jeden punkt $y \in A$ taki, że $f_t(A \setminus \{y\}) \pitchfork B$, oraz punkt $f_t(y)$ jest prostym punktem nietranswersalności.

Dla $i = 0, 1$ określamy

$$K_i = f_i(A) \cdot B = \sum_{y:\ \in f_i(y) \in B} \delta y, \tag{1}$$

gdzie $\delta_y = +1$ gdy $Df_i(T_y A) + T_{f_i(y)}$ zadaje tę samą orientację, co $T_y M$, a -1 gdy przeciwną.

Wykaż, że $K_0 = K_1$.

Zadanie 3 (Indeks przecięcia. II)**.** Niech B będzie podrozmaitością zwartą zwartej rozmaitości M oraz A i B są zorientowane i $\dim A + \dim B = \dim M$. Załóżmy, że $F : A \times [0,1] \to M$ będzie gładkim odwzorowaniem takim, że $f : A \to M$ $f(x) = F(x, 0)$

i $g : A \to M$, $g(x) = F(x, 1)$ są transwersalne do B. Wykaż, że indeksy przecięcia $f(A) \cdot B$ i $g(A) \cdot B$ są zerowe.

Zadanie 4 (Indeks przecięcia. III)**.** Niech teraz A będzie zorientowaną podrozmaitością gładką zwartej zorientowanej rozmaitości M taką, że istnieje $G \subset M$, rozmaitość z brzegiem, taka że $\partial G = A$.

Udowodnij, że dla dowolnej rozmaitości $B \subset M$, zorientowanej, takiej że $\dim A + \dim B = \dim M$ zachodzi
$$A \cdot B = 0.$$
Ten fakt nazywamy niezmienniczością indeksu przecięcia w klasie homologii, cokolwiek by to znaczyło.

Maciej Borodzik