Siódmy zestaw zadań z Analizy II*.

Termin oddania piątek, 4 kwietnia 2008

Zadanie 1. Rozważmy całkę
$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} \frac{dxdy}{\sqrt{xy}}. \tag{1}$$
Rozwijając $(1-xy)^{-1}$ w szereg i całkując wyraz po wyrazie (uzasadnij, że wolno) wykaż, że
$$I = 3\zeta(2).$$
Z drugiej strony dokonaj w (1) zamiany zmiennych
$$x = \xi^2 \frac{1+\eta^2}{1+\xi^2}, \quad y = \eta^2 \frac{1+\xi^2}{1+\eta^2}$$
i oblicz I *explicite* jako całkę po zmiennych ξ i η.

Zadanie 2. Niech M będzie zwartą n wymiarową rozmaitością zanurzoną w przestrzeń euklidesową k wymiarową $\mathbb{R}^k$, przy czym $k \geq 2n+2$.

Niech H będzie $k-1$ wymiarową hiperpłaszczyzną w $\mathbb{R}^k$, rozłączną z M.

Dla ustalonego punktu $p \in \mathbb{R}^k \setminus (M \cup H)$ rozpatrujemy przekształcenie $\pi_p : M \to H$ będące rzutem z punktu p na H.

Wykaż, że dla p należącego do pewnego zbioru otwartego i gęstego odwzorowanie π_p przeprowadza M dyfeomorficznie na swój obraz.

Zadanie 3. Niech Ω będzie otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$. Dla funkcji lokalnie całkowalnej f (każdy punkt ma otoczenie U takie, że $\int_U |f| d\mu < \infty$ określamy
$$||f||_{BMO} = \sup_{Q \subset \Omega} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(x) - f_Q| d\mu,$$
gdzie $f_Q = \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f(x) d\mu$ jest średnią wartością f na zbiorze pewnym zbiorze otwartym Q, którego domknięcie jest zwarte.

(a) Wykaż, że przestrzeń funkcji o ogranicznomym średnim wahaniu skończonym (bounded mean oscillation, BMO) zadana jako
$$\{f : ||f||_{BMO} < \infty\} / \sim,$$
gdzie $\sim$ jest relacją równoważności $f \sim g \iff f - g = const$ jest przestrzenią Banacha (normą ma być oczywiście funkcja $||f||_{BMO}$, relacja równoważości jest potrzebna, bo funkcja stała ma średnie wahanie równe zero).

(b) Załóżmy teraz, że Ω jest kostką o objętości 1, f jest funkcją o wartości średniej na kostce równej zero i klasy BMO. Udowodnij, że istnieją uniwersalne stałe c_1 i c_2 niezależące od f, że $\forall l > 0$
$$\mu(\{x : |f(x)| > l\}) \leq c_1 e^{-l/c_2 \cdot ||f||_{BMO}}.$$

Zadanie 4. Dla ustalonych liczb całkowitych nieujemnych n, m wyraź całkę

$$\int_{B_n} x_1^m,$$

gdzie $B_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum x_i^2 \leq 1\}$ za pomocą funkcji Γ Eulera.

Zadanie 5. Posługując się dowolną, poprawną metodą udowodnij, że

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2r\cos x + r^2) = \begin{cases} 2\ln r & r \geq 1 \\ 0 & 0 \leq r \leq 1. \end{cases}$$

Zadanie 6. Dla ustalonego $n > 1$ niech $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ będzie pierwiastkiem odpowiedniego stopnia z jedności.

Niech

$$B_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \ldots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \ldots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \ldots & \varepsilon^{3(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \ldots & \varepsilon^{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Licząc B_n na dwa różne sposoby wykaż, że

$$\iint_{0\leq x\leq y\leq\pi} \ln|\sin(x-y)|dxdy = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2.$$

Maciej Borodzik