Szósty zestaw zadań z Analizy II*.

Termin oddania: 23 stycznia 2008

Zadanie 1. Niech $V \subset \mathbb{R}^3$ będzie zadany wzorem $x^2+y^2-z^3=0$. Rozważmy przestrzeń B funkcji f, które spełniają następujące warunki

1 f jest ciągła i ograniczona na V.
2 f jest różniczkowalna poza zerem i Df ograniczona na $V \setminus \{0\}$.

Wprowadzamy w B topologię: powiemy, że $f_n \to f$ w B, gdy $f_n \rightrightarrows f$ na V oraz $Df_n \rightrightarrows Df$ na $V \setminus \{0\}$.

Scharakteryzuj wszystkie ciągłe i *liniowe* odwzorowania $v : B \to \mathbb{R}$ takie, że $v(fg) = f(0)v(g) + v(f)g(0)$.

Zadanie 2. Niech dane będą macierze $S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ oraz $S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Niech też $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0,0,0\} \to \mathbb{R}$ będzie klasy C^1. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne

(a) Istnieje takie $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, że $f(x,y,z) = g(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$.
(b) Dla każdej macierzy ortogonalnej A o wymiarach 3×3 i każdego wektora $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0,0,0\}$ mamy $f(Av) = f(v)$.
(c) Dla każdego wektora $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0,0,0\}$ i każdego $i = 1,2,3$ zachodzi
$$f(v + \varepsilon S_i v) - f(v) = o(\varepsilon).$$

Zadanie 3. Anulowane.

Zadanie 4. Niech V będzie przestrzenią liniową $n-$wymiarową, zaś $e_1, \ldots, e_n$ bazą ortonormalną, zorientowaną.

W przestrzeni $\Lambda^k V$ wybieramy iloczyn skalarny tak, żeby $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$ dla $1 \leq i_1 < i_2 \cdots < i_k \leq n$ było bazą ortogonalną.

- Udowodnij, że powyższa definicja jest poprawna, czyli zależy wyłącznie od iloczynu skalarnego w V, a nie od konkretnego wyboru bazy.
- Niech teraz $\omega \in \Lambda^k V$. Wykaż, że ω zadaje odwzorowanie liniowe $i_\omega : \Lambda^{n-k} V \to \mathbb{R}$ wzorem $\eta \to \omega \wedge \eta$, gdzie ostatni element jest w $\Lambda^n V$, który utożsamiamy z $\mathbb{R}$.
- Wykaż, że odwzorowanie i_ω zadaje dokładnie jeden element $*\omega \in \Lambda^{n-k} V$.
- Udowodnij, że przekształcenie $\omega \to *\omega$ jest izometrią $\Lambda^k V \to \Lambda^{n-k} V$ (nazywa się to gwiazdką Hodge'a). Oblicz $*^2$.

Zadanie 5 (Twierdzenie E. Noether)**.** Niech $L(y,z) : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ będzie gładką funkcją dwóch zmiennych wektorowych (y_1, y_2, y_3) i (z_1, z_2, z_3). Załóżmy, że istnieje grupa h^s, $s \in \mathbb{R}$ (w lokalnych współrzędnych $h^s(y) = (h_1^s(y), h_2^s(y), h_3^s(y))$) dyfeomorfizmów $\mathbb{R}^3$ taka, że dla dowolnego s

$$L(h^s(y), Dh^s(y) \cdot z) = L(y, z)$$

(L jako funkcja z $T\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest niezmiennicza względem h^s, przy czym oczywiście $Dh^s(y) \cdot z = \sum \frac{\partial h_i^s(y)}{\partial y_j} z_j$). Udowodnij, że wielkość

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial z_i} \left. \frac{dh_i^s(y)}{ds} \right|_{s=0},$$

jest stałą układu Eulera–Lagrange'a związanego z działaniem

$$I[y] = \int_{\mathbb{R}} L(y(x), y'(x))dx.$$

(To znaczy jej pochodna po x jest równa zero). Wypisz tę stałą w sytuacji gdy $L(y,z) = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) - U(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$, $U : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją gładką, zaś grupa dyfeomorfizmów dana jest przez $h^s(y) = e^{As}y$ przy czym A jest macierzą 3×3 taką, że $A + A^T = 0$.

Maciej Borodzik