Piąty zestaw zadań z Analizy II*.

Termin oddania: 21 grudnia 2007

Zadanie 1. Stosując metodę omawianą na ćwiczeniach, wyprowadź algorytm znajdowania

(a) odwrotności macierzy A 2×2;

(b) macierzy B takiej, że $B^2 = A$ dla zadanej macierzy A o wymiarach 3×3.

Zadanie 2. Niech $0 < a < b < c < d$. Rozpatrujemy zbiór $E = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{u^2}{d^2} = 1\}$. Niech $S_r = E \cap \{x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = r^2\}$. Wykaż, że $S_r \cap E$ jest gładką powierzchnią wtedy i tylko wtedy, gdy $(r - a)(r - b)(r - c)(r - d) \neq 0$ oraz $a < r < d$. Naszkicuj zbiór $S_r \cap E$ dla pewnego $r \in (a, b)$, pewnego $r \in (b, c)$ oraz $r \in (c, d)$.

Zadanie 3. Niech $P = [a, b] \times [c, d]$ będzie prostokątem. Niech $f_0 : \partial P \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, różniczkowalną poza rogami i lipschitzowską.

Rozważmy przestrzeń funkcji $C_0 = \{f \in C^2(P) : f|_{\partial P} = f_0\}$ oraz funkcjonał $S : C_0 \to \mathbb{R}$ zadany wzorem

$$S[f] = \int_a^b \left(\int_c^d (f'_y(x, y))^2 \, dy \right) dx + \int_c^d \left(\int_a^b (f'_x(x, y))^2 \, dx \right) dy.$$

Wypisz równanie Eulera–Lagrange'a dla S.

Można przyjąć, że $\int_a^b (\int_c^d G(x, y) dy) dx = \int_c^d (\int_a^b G(x, y) dx) dy$ dla wszystkich funkcji G, które pojawiają się w zadaniu.

Zadanie 4. Niech $SU(2)$ oznacza zbiór macierzy zespolonych o wymiarach 2×2 takich, że $A \cdot \bar{A}^T = I$ oraz $\det A = 1$.

(a) Wykaż, że $SU(2)$ jest gładkim podzbiorem $\mathbb{C}^4 = \mathbb{R}^8$ wymiaru rzeczywistego 3.

(b) Udowodnij, że przestrzeń styczna do $SU(2)$ w punkcie odpowiadającym macierzy identycznościowej jest równa zbiorowi macierzy $B \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ takich, że $B + \bar{B}^T = 0$ oraz $Tr B = 0$. Wykaż też, że ten zbiór jest algebrą Liego.

(c) Skonstruuj dyfeomorfizm między $SU(2)$ a S^3.

Zadanie 5. Stosując równanie Eulera–Lagrange'a dla funkcjonału

$$S[\gamma] = \int_a^b (\dot{\gamma}_1^2(t) + \cos^2 \gamma_1 \cdot \dot{\gamma}_2^2(t)) dt,$$

gdzie $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ jest krzywą w $(-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi, \pi)$ wykaż, że najkrótsza krzywa na sferze $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ łącząca dwa zadane punkty jest łukiem wielkiego okręgu.

Wskazówka: Pokaż, że jeśli ograniczamy się do krzywych sparametryzowanych tak, że $\dot{\gamma}_1^2(t) + \cos^2 \gamma_1 \cdot \dot{\gamma}_2^2(t)$ jest stałe, to minima funkcjonału S są również minimami funkcjonału $S_1[\gamma] = \int_a^b \sqrt{\dot{\gamma}_1^2(t) + \cos^2 \gamma_1 \dot{\gamma}_2^2(t)} dt$

Maciej Borodzik