Czwarty zestaw zadań z Analizy II*.

Termin oddania: 10 grudnia 2007

Zadanie 1. Niech dana będzie przestrzeń liniowa V wymiaru n. Wykaż, że istnieje taka przestrzeń $\Lambda^k(V)$ (najładniej w TeX'u wychodzi `\Lambda`), wraz z odwzorowaniem $k-$liniowym $i : V \times \ldots V \to \Lambda^k(V)$, *antysymetrycznym* (albo *skośniesymetrycznym* albo *alternującym*) czyli

$$i(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -i(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k)$$

takim, że dla dowolnej przestrzeni liniowej W i odwzorowania $k-$liniowego antysymetrycznego $f : V \times \cdots \times V \to W$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie $h : \Lambda^k(V)$, że następujący diagram jest przemienny

$$\begin{tikzcd}
V \times \cdots \times V \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \Lambda^k(V) \arrow[d, dashed, "h"] \\
& W
\end{tikzcd}$$

Przestrzeń $\Lambda^k(V)$ nazywamy *$k-$tą potęgą zewnętrzną* przestrzeni V. To jest najważniejsze z zadań „teoriokategoryjnych", które były podawane.

Zadanie 2. Oblicz wymiar przestrzeni $\Lambda^k(V)$. Udowodnij, że dla dowolnych k i l istnieje dobrze określone odwzorowanie dwuliniowe $\wedge : \Lambda^k \times \Lambda^l \to \Lambda^{k+l}$ nazwane *mnożeniem zewnętrznym*, które jest łączne, oraz obraz $\Lambda^k \times \Lambda^l$ rozpina Λ^{k+l} jako przestrzeń liniową.

Zadanie 3. Niech $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ będzie zadane wzorem $f(x) = 1 - |2x - 1|$. Skonstruuj funkcję ciągłą $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ taką, że dla dowolnego $t > 0$ funkcja $f_t(x) = f(x) + tg(x)$ nie przyjmuje swojego supremum w punkcie $x_0 = \frac{1}{2}$. Udowodnij, że żadna funkcja g spełniająca te własności nie może być lipschitzowska w otoczeniu $\frac{1}{2}$.

Dodatkowy punkt dostanie osoba, która pokaże najbardziej regularny (z dowodem regularności) przykład funkcji g.

Zadanie 4. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie podzbiorem otwartym. Niech $F_1, \ldots, F_k : \Omega \to \mathbb{R}^n$ będą funkcjami odpowiednio gładkimi (wystarczy C^1). Określmy

$$M = \{x \in \Omega \colon \forall_{i=1,\ldots,k} F_i(x) = 0\}.$$

Przypuśćmy, że dla każdego $x \in M$ układ wektorów $\nabla F_1(x), \ldots, \nabla F_k(x)$ rozpina $k-$wymiarową przestrzeń V_x.

Weźmy $x_0 \in M$ oraz $v \perp V_{x_0}$, $v \neq 0$. Udowodnij, że istnieje krzywa na M styczna do v w x_0, inaczej mówiąc odwzorowanie $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ klasy C^1, takie, że $\gamma(0) = x_0$ oraz $\dot\gamma(0) = v$.

Zadanie 5. Niech $G(k,n)$ będzie przestrzenią wszystkich podprzestrzeni $k-$wymiarowych w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Wykaż, że $G(k,n)$ jest rozmaitością i policz jej wymiar.

Sprecyzowanie: możemy rozważać podzbiór $A \subset \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k}$ składający się z wektorów liniowo niezależnych. W tym zbiorze wprowadzamy relację równoważności $(v_1, \ldots, v_k) \sim (w_1, \ldots, w_k)$ wtedy gdy

$$\mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_n) = \mathrm{lin}(w_1, \ldots, w_n).$$

Przestrzeń ilorazowa to ma być $G(k,n)$, ale są prostsze sposoby, żeby pokazać, iż to jest rozmaitość.

Wskazówka: Można zacząć od $k = 1$. Powstaje przestrzeń rzutowa, o której powiemy na ćwiczeniach. Mogą coś pomóc zadanie 1 i 2.

Zadanie 6. Niech $V \subset \mathbb{R}^3$ będzie zadany wzorem $x^2 + y^2 - z^3 = 0$. Rozważmy przestrzeń B funkcji f, które spełniają następujące warunki

1 f jest ciągła i ograniczona na V.

2 f jest różniczkowalna poza zerem i Df ograniczona na $V \setminus \{0\}$.

Wprowadzamy w B topologię: powiemy, że $f_n \to f$ w B, gdy $f_n \rightrightarrows f$ na V oraz $Df_n \rightrightarrows Df$ na $V \setminus \{0\}$.

Scharakteryzuj wszystkie ciągłe odwzorowania $v : B \to \mathbb{R}$ takie, że $v(fg) = f(0)v(g) + v(f)g(0)$.

Maciej Borodzik