Trzeci zestaw zadań z Analizy II*.

Termin oddania: 19 listopada 2007

Zadanie 1. Niech dane będą dwie przestrzenie liniowe skończenie wymiarowe V i W. Wykaż, że istnieje taka przestrzeń liniowa $V \otimes W$ wraz z odwzorownaniem *dwuliniowym* $I : V \times W \to V \otimes W$, że dla każdego *dwuliniowego* odwzorowania $B : V \times W \to X$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $L : V \otimes W \to X$, że następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "I"] \arrow[dr, "B"'] & V \otimes W \arrow[d, dashed, "L"] \\
& X
\end{tikzcd}$$

Zadanie 2. Niech dane będą przestrzenie liniowe U, V, W, X oraz odwzorowania liniowe $f : U \to W$, $g : V \to X$. Udowodnij, że istnieje naturalne przekształcenie liniowe $f \otimes g : U \otimes V \to W \otimes X$. Przy tym naturalność (dla osób o mocnych nerwach i szczerym pragnieniu, żeby wszystko było ściśle) ma oznaczać, że następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd}
U \times V \arrow[r, "I_{U,V}"] \arrow[d, "f \times g"'] & U \otimes V \arrow[d, dashed, "f \otimes g"'] \\
W \times X \arrow[r, "I_{W,X}"] & W \otimes X
\end{tikzcd}$$

Jeśli wszystkie $U = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$ i $X = \mathbb{R}$ wraz ze standardową bazą oraz $f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ oraz $g = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$, znajdź macierz przekształcenia $f \otimes g$ w standardowej bazie przestrzeni $U \otimes V$ i $W \otimes X$.

Zadanie 3. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwartym podzbiorem ograniczonym oraz $f \in C^2(\Omega)$. Wykaż, że dla dowolnego ε istnieje takie $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, liniowe o normie $||A|| < \varepsilon$, że funkcja $g(x) = f(x) + Ax$ ma wyłącznie niezdegenerowane punkty krytyczne.

Punkt krytyczny funkcji $l : \Omega \to \mathbb{R}$ *to taki punkt, że* $\frac{\partial l}{\partial x_i} = 0$ *dla wszystkich* $i = 1 \dots n$. *Jest on* niezdegenerowany *jeśli macierz drugich pochodnych* $Hl = \left\{ \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} \right\}_{i,j=1}^n$ *ma niezerowy wyznacznik.*

Zadanie 4. Niech Ω będzie podzbiorem otwartym i ograniczonym $\mathbb{R}^n$. Niech też $h : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, która jest wielomianem jednorodnym stopnia 2 ma drugiej współrzędnej. (Ogólna postać takiej funkcji to

$h(x,y) = h_{11}(x)y_1^2 + h_{12}(x)y_1y_2 + h_{22}(x)y_2^2 + \cdots + h_{nn}(x)y_n^2$, gdzie $x \in \Omega$ zaś $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.) Z taką funkcją wiążemy operator różniczkowy (przekształcenie z $C^2(\Omega)$ do $C(\Omega)$) zadany wzorem

$$f(x) \to Df = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

(Na przykład dla $h(x,y) = \sum y_i^2$ mamy $Df = \Delta f$.) Przypuśćmy, że dla dowolnego $x \in \Omega$ wielomian $y \to h(x,\cdot)$ jest stale dodatni poza punktem $(0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$. Wykaż, że żadna funkcja f klasy C^2 spełniająca $Df \equiv 0$ nie ma maksimum lokalnego wewnątrz obszaru Ω (nazywa się to zasadą maksimum dla operatora D). Operator D gdy h spełnia $h(x,y) \geq 0$ i $h(x,y) = 0$ gdy $y = 0$ nazywa się (słabo) eliptycznym (silnie, gdy $h(x,y) > C||y||^2$).

Rozwiązania mogą się opierać na poprzednim zadaniu. Rozwiązania nieelementarne, odwołujące się do wielowymiarowcyh całek, powinny być szczegółowo uzasadnione.

Zadanie 5. Rozpatrzmy przestrzeń $A = C^1(\Omega)$ z normą jak zawsze, gdzie Ω — jak zawsze. Niech $x_0 \in \Omega$. Przypuśćmy, że $D : A \to \mathbb{R}$ spełnia następujące warunki

liniowość: $D(f+g) = Df + Dg$
reguła Leibnitza: $D(f \cdot g) = f(x_0)Dg + g(x_0)Df$
ciągłość: $\lim Df_n = D(\lim f_n)$.

Wykaż, że istnieje taki $v \in \mathbb{R}^n$, że $Df = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$. Podaj przykład, że teza nie zachodzi bez założenia ciągłości D. Przekształcenie D spełniające trzy powyższe warunki nazywa się *różniczkowaniem*. Powyższe zadanie uzasadnia po części oznaczanie pochodnej kierunkowej jako $v(f)$.

Maciej Borodzik