Drugi zestaw zadań z Analizy II*. Algebra liniowa.

Termin oddania zadań: poniedziałek, 5 listopada 2007 o 12:15.

Wszystkie zadania, poza być może ostatnim, dotyczą twardej analizy.

Zadanie 1. Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą o wartościach własnych $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, przy czym krotność $i-$tej wartości własnej wynosi m_i. Rozpatrzmy wielomian

$$P(\lambda) = a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

oraz układ równań

$$\begin{array}{ccccc} P(\lambda_1) = e^{\lambda_1} & \dots & \frac{\partial}{\partial\lambda}P|_{\lambda=\lambda_1} = e^{\lambda_1} & \dots & \frac{\partial^{m_1-1}}{\partial\lambda^{m_1-1}}P|_{\lambda=\lambda_1} = e^{\lambda_1} \\ \dots & & & & \\ P(\lambda_k) = e^{\lambda_k} & \dots & \frac{\partial}{\partial\lambda}P|_{\lambda=\lambda_k} = e^{\lambda_k} & \dots & \frac{\partial^{m_k-1}}{\partial\lambda^{m_k-1}}P|_{\lambda=\lambda_k} = e^{\lambda_1} \end{array}$$

gdzie niewiadomymi są współczynniki wielomianu P. (Jeśli $m_i = 1$, bierzemy wyłącznie równanie $P(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$.) Udowodnij, że zachodzi równość

$$e^A = a_1A^{n-1} + a_2A^{n-2} + \dots + a_{n-1}A + a_nI.$$

To zadanie pozwala na efektywne obliczanie e^A, bez konieczności sprowadzania macierzy do postaci Jordana, co może się przydać na zajęciach z RRZ. Metoda ta jest tematem tabu na wydziale Matematyki.

Zadanie 2. Niech $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ będzie przestrzenią macierzy rzeczywistych. Wykaż, że $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$. Jest to jedno ze sformułowań twierdzenia Liouvilla. Inne sformułowania mówią np. o tym, że potok hamiltonowski zachowuje formę symplektyczną na rozmaitości i są, wbrew pozorom, bardzo zbliżone.

Zadanie 3. Niech $I = [0, 1]$ i $f(x) = 1 - |2x - 1|$. Wykaż, że funkcja $||\cdot|| : C(I) \to \mathbb{R}$ ma w f pochodną w każdym kierunku w f, pochodna ta jest liniowa, ale $||\cdot||$ nie ma pochodnej Frécheta w f.

Definicja 1. Przestrzeń liniową V wraz z odwzorowaniem dwuliniowym $V \times V \to V$ oznaczanym przez $[\cdot,\cdot]$ nazwiemy *algebrą Liego* jeśli $[\cdot,\cdot]$ spełnia następujące warunki

antysymetryczność: $[a, b] = -[b, a]$ dla $a, b \in V$.

tożsamość Jacobiego: $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$ dla $a, b, c \in V$.

Zadanie 4. Niech $n \geq 2$. Niech $so(n) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : \operatorname{tr} A = 0, A + A^T = 0.\}$ (ładne oznaczenie to $\mathfrak{so}(n)$ uzyskiwane komendą `mathfrak`). Wykaż, że jeśli $A \in so(n)$, to $e^A \in SO(n)$, gdzie $SO(n)$ oznacza macierze ortogonalne o wyznaczniku 1. Wykaż, że $so(n)$ wraz z odwzorowaniem $[A, B] \to A \cdot B - B \cdot A$ jest algebrą Liego (wymaga to również sprawdzenia, że $[A, B] \in so(n)$, gdy $A, B \in so(n)$.

Wykaż także, że iloczyn wektorowy na $\mathbb{R}^3$ zadaje na tej przestrzeni również strukturę algebry Liego izomorficznej $so(3)$, czyli istnieje taki izomorfizm przestrzeni liniowych $f : \mathbb{R}^3 \to so(3)$, że $[f(x), f(y)] = f(x \times y)$.

Definicja 2. Niech $\{V_k\}_{k\in K}$ będzie rodziną przestrzeni liniowych. *Sumą prostą* przestrzeni V_k nazwiemy przestrzeń $\bigoplus\limits_{k\in K} V_k$ wraz z odwzorowaniami $i_k : V_k \to \bigoplus\limits_{k\in K} V_k$ takimi, że dla dowolnej przestrzeni liniowej W oraz dowolnej rodziny odwzorowań $f_k : V_k \to W$ istnieje dokładnie jedno odwzorowanie $\tilde{f} : \bigoplus\limits_{k\in K} V_k \to W$ takie, że dla każdego $k \in K$ następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd} V_k \arrow[r, "i_k"] \arrow[d, "f_k"'] & \bigoplus_{k\in K} V_k \arrow[dl, dotted, "\tilde{f}"] \\ W & \end{tikzcd}$$

Definicja 3. Niech $\{V_k\}_{k\in K}$ będzie rodziną przestrzeni liniowych. *Iloczynem kartezjańskim* a. *produktem* przestrzeni V_k nazwiemy przestrzeń $\underset{k\in K}{\times} V_k$ wraz z odwzorowaniami $p_k : \underset{k\in K}{\times} V_k \to V_k$ takimi, że dla dowolnej przestrzeni liniowej W oraz dowolnej rodziny odwzorowań $g_k : W \to V_k$ istnieje dokładnie jedno odwzorowanie $\tilde{g} : W \to \underset{k\in K}{\times} V_k$ takie, że dla każdego $k \in K$ następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dl, dotted, "\tilde{g}"'] \arrow[d, "g_k"] \\
\times_{k\in K} V_k \arrow[r, "p_k"] & V_k
\end{tikzcd}$$

Zadanie 5. Niech $\{V_k\}_{k\in K}$ będą przestrzeniami liniowymi.

- Wykaż, że $i_k : V_k \to \bigoplus\limits_{k\in K} V_k$ są monomorfizmami.
- Udowodnij, że $p_k : \underset{k\in K}{\times} V_k \to V_k$ są epimorfizmami.
- Wykaż, że jeśli K jest zbiorem nieskończonym, to $\bigoplus\limits_{k\in K} V_k$ może istotnie różnić się od $\underset{k\in K}{\times} V_k$.

Przyzwoite diagramy w TeX'u można zrobić za pomocą pakietu `pstnode`. Ale trzeba pamiętać o środkach strzałek, bo inaczej wychodzą krzywo.

Maciej Borodzik