Pierwszy zestaw zadań z Analizy II*. Przestrzenie liniowe.

Termin oddania zadań: poniedziałek, 22 października 2007 o 12:15.

Zadanie 1. Niech $V = \mathbb{R}[x]$ oznacza przestrzeń liniową wielomianów nad liczbami rzeczywistymi. Określmy w V następujące normy:

$$\begin{aligned} ||p||_1 &= \sup|p(x)|, && x \in [0,1], \\ ||p||_2 &= \sup|p(x)|, && x \in [0,3], \\ ||p||_3 &= \sup|p(x)|, && x \in [2,3]. \end{aligned}$$

Sprawdź, które z nich są równoważne, a które nie są.

Zadanie 2. Niech $V, ||\cdot||$ będzie przestrzenią Banacha. Niech $B = \{x \in V : ||x|| \leq 1\}$ będzie kulą jednostkową. Udowodnij, że B jest zwarta wtedy i tylko wtedy gdy V jest skończenie wymiarowa (tzn. V ma bazę mocy skończonej).

Zadanie 3. Niech $V, ||\cdot||$ będzie skończenie wymiarowa i $W \subset V$ będzie podprzestrzenią liniową kowymiaru 1 (tzn. $\dim V/W = 1$). Załóżmy, że $f : W \to \mathbb{R}$ jest liniowe i $||f|| = A$. Wykaż, że istnieje takie liniowe $\tilde{f} : V \to \mathbb{R}$ takie, że

1. $\tilde{f}|_W = V$,
2. $||\tilde{f}|| = A$.

Zadanie 4. Niech $I = [0,1]$, a $C_0^1(I)$ oznacza przestrzeń funkcji klasy C^1 znikających na brzegach. Czy wielkość $||f||_{-1} = ||f'||_{sup} - ||f||_{sup}$ spełnia warunek trójkąta?

Zadanie 5. Niech D będzie przekształceniem liniowym $Df = f'$. Oblicz $e^D f$ i znajdź taką przestrzeń liniową V, że $D : V \to V$ jest ciągłe i $\dim V = \infty$.

Zadanie 6. Niech f będzie ciągłą i ograniczoną funkcją na $I = [0,1]$. Określamy odwzorowanie $A_f : C(I) \to C(I)$ przez $A_f(g) = f \cdot g$. Znajdź normę A_f. Określ zbiór tych $\lambda \in \mathbb{R}$, że $A_f - \lambda Id$ (Id oznacza identyczność) jest odwracalne. Znajdź zbiór wartości i wektorów własnych A_f.

Maciej Borodzik