Zestaw dziesiąty zadań z Analizy II*.

termin oddania 30 maja 2008.

Zadanie 1 (teoria Hodge'a)**.** Niech M będzie zwartą rozmaitością riemannowską. Dla $\omega \in \Omega^k(M)$ określamy

$$||\omega||^2_{L^2} = \int_M \omega \wedge * \omega = \int_M \langle \omega, \omega \rangle \, dvol.$$

(a) Ustalmy formę $\omega \in \Omega^k(M)$ taką, że $d\omega = 0$. Określamy zbiór *(oznaczenie niekanoniczne)*

$$A_\omega = \{\omega + d\eta, \eta \in \Omega^{k-1}(M)\}.$$

Wykaż, że $\xi \in A_\omega$ jest minimum lokalnym odwzorowania

$$|| \cdot ||^2 \colon A_\omega \mapsto \mathbb{R},$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $d * \xi = 0$.

(b) Wykaż, że $|| \cdot ||^2$ ma na A_ω co najwyżej jedno minimum lokalne.

(c)* Wykaż, że to odwzorowanie ma dokładnie jedno minimum.

(d)** Udowodnij, że zbiór $Harm^k(M)$ takich $k-$form ξ dla których $d\xi = 0$ oraz $d * \xi = 0$ jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową. *Uwaga! Samo napisanie, że jest to przestrzeń liniowa, może przynieść tylko ujemne punkty (jak się zdenerwuję).*

(e) Wykaż, że $\dim Harm^k(M)$ nie zależy od wyboru metryki Riemanna.

Zadanie 2 (kohomologie de Rhama)**.** Niech M będzie zwartą rozmaitością gładką. Niech

$$H^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \colon d\omega = 0\} / \{\omega \in \Omega^k \colon \exists \eta \in \Omega^{k-1} \colon d\eta = \omega\},$$

gdzie „/" oznacza wzięcie przestrzeni ilorazowej.

(a) Wykaż, że $H^0(M) = \mathbb{R}^d$, gdzie d jest ilością składowych spójnych M.

(b) Udowodnij, że jeśli M jednospójna to $H^1(M) = 0$.

(c) Korzystając z zadania 1.d wykaż, że $\forall k = \{0, \ldots, n\}$ mamy $\dim H^k(M) < \infty$ oraz $H^k(M) \simeq H^{n-k}(M)$, gdzie $n = \dim M$ (izomorfizm zadany jest przez gwiazdkę Hodge'a). Ten ostatni fakt nazywamy *dualnością Poincarégo.*

(d) Niech teraz $f : M \to N$ będzie gładkim odwzorowaniem. Wykaż, że przeciągnięcie formy $\omega \in \Omega^k(N)$ do $f^*\omega \in \Omega^k(M)$ zadaje odwzorowanie $f^* : H^k(N) \to H^k(M)$. Ponadto, jeśli f jest dyfeomorfizmem, to f^* jest izomorfizmem. *To uzasadnia przedrostek „ko". Strzałka f^* idzie niejako wstecz.*

Zadanie 3 (ciąg Mayera–Vietorisa)**.** Niech M będzie zwartą rozmaitością gładką. Załóżmy, że dane są dwa zbiory otwarte U_1, U_2 takie, że $U_1 \cup U_2 = M$. Niech $U_3 = U_1 \cap U_2$.

Określmy następujące odwzorowania

$$\begin{aligned}
\tilde{\imath}\colon \Omega^k(M) &\mapsto \Omega^k(U_1) \oplus \Omega^k(U_2) & \omega &\to (\omega|_{U_1}, \omega|_{U_2}) \\
\tilde{\jmath}\colon \Omega^k(U_1) \oplus \Omega^k(U_2) &\mapsto \Omega^k(U_3) & (\omega_1, \omega_2) &\to \omega_1|_{U_3} - \omega_2|_{U_3} \\
\tilde{l}\colon \Omega^k(U_3) &\mapsto \Omega^{k+1}(M), & &
\end{aligned}$$

to ostatnie odwzorowanie określamy (na razie niejednoznacznie) następująco: w pokrycie U_1, U_2 wpisujemy rozkład jedności. To znaczy znajdujemy dwie takie funkcje klasy C^∞ $\phi_1, \phi_2 : M \to [0,1]$ o tej własności, że $\phi_i = 0$ poza U_i oraz $\forall x \in M$ $\phi_1(x) + \phi_2(x) = 1$.

Kładziemy

$$\tilde{l}(\xi) = d\phi_2 \wedge \xi.$$

(a) Wykaż że przekształcenia $\tilde{\imath}, \tilde{\jmath}$ i $\tilde{l}$ zadają dobrze określone przekształcenia

$$\begin{aligned}
i\colon H^k(M) &\to H^k(U_1) \oplus H^k(U_2) \\
j\colon H^k(U_1) \oplus H^k(U_2) &\to H^k(U_3) \\
l\colon H^k(U_3) &\to H^k(M).
\end{aligned}$$

(b) Udowodnij, że następujący ciąg jest dokładny

$$\begin{array}{l}
0 \longrightarrow H^0(M) \xrightarrow{i} H^0(U_1) \oplus H^0(U_2) \xrightarrow{j} H^0(U_3) \xrightarrow{l} \dots \\
\dots \longrightarrow H^1(M) \xrightarrow{i} H^1(U_1) \oplus H^1(U_2) \xrightarrow{j} H^1(U_3) \xrightarrow{l} \dots \\
\dots \longrightarrow H^k(M) \xrightarrow{i} H^k(U_1) \oplus H^k(U_2) \xrightarrow{j} H^k(U_3) \xrightarrow{l} \dots \\
\dots \longrightarrow H^{k+1}(M) \xrightarrow{i} \dots
\end{array}$$

Innymi słowy $\ker i = \operatorname{im} l$, $\ker j = \operatorname{im} i$ oraz $\ker l = \operatorname{im} j$.

Zadanie 4 (Homotopijna niezmienniczość kohomologii)**.** To zadanie pokazuje, że kohomologie nie zależą od typu homotopii rozmaitości. Niech M będzie zwartą rozmaitością.

(a) Niech t będzie współrzędną na $[0,1]$ oraz, przez produkt, współrzędną na $M \times [0,1]$. Wykaż, że dowolną formę $\omega \in \Omega^k(M \times [0,1])$ można przedstawić w postaci

$$\omega = \omega_0(t) + dt \wedge \omega_1(t),$$

gdzie $\forall t \in [0,1]$ $\omega_0 \in \Omega^k(M)$ oraz $\omega_1 \in \Omega^{k-1}(M)$.

(b) Niech $i_0, i_1\colon M \to M \times [0,1]$ będą włożeniami $i_k(x) = (x, k)$. Jeśli $\omega_1(t)$ jest takie, jak w punkcie (a), to określamy $(k-1)$-formę

$$Q\omega = \int_0^1 dt \wedge \omega_1(t).$$

Udowodnij, że $\forall \omega \in \Omega^k(M \times [0,1])$zachodzi następujący wzór:

$$d(Q\omega) + Qd\omega = i_1^*\omega - i_0^*\omega. \tag{1}$$

(c) Niech $F : M \times [0,1] \to N$ będzie gładkim odwzorowaniem realizującym homotopię między $f : M \to N$, $f(x) = F(x,0)$ a $g : M \to N$ zadanym przez $g(x) = F(x,1)$. Określamy

$$f^*, g^* : H^k(N) \to H^k(M).$$

Korzystając z (1) udowodnij, że $f^* = g^*$.

(d) Wykaż, że jeśli M i N są homotopijnie równoważne, to $H^k(M) = H^k(N)$.

Maciej Borodzik