Zasady

(1) Przy każdym zadaniu jest podana liczba punktów, które można dostać za zadanie. Przy tym maksymalna ilość punktów za ćwiczenia wynosi 60.
(2) Liczba punktów jest również wyznacznikiem stopnia trudności.
(3) Jeśli liczba punktów jest przedstawiona jako suma, oznacza to, że zadanie składa się z kilku części i przedstawione są punkty za każdą część.
(4) Do 31 marca proszę, aby każdy wybrał sobie jedno zadanie, które zrobi i zgłosił mnie. Każdy robi **jedno** zadanie. Dopuszczalne jest, żeby dwie osoby wspólnie robiły dwa zadania: 3 i 4.
(5) Można zgłosić dwa albo trzy zadania z wyborem kolejności: które chce się robić, jak będzie zajęte, to które potem.
(6) Każdy ma robić inne zadanie. Jeśli dwie, lub więcej osób zgłosi się do tego samego zadania, to
   — albo ktoś dostanie następne zadanie z listy, które wybrał;
   — albo będę sugerował jednej osobie zmianę zadania na innde;
   — albo będę losował, mogę przy świadkach.
(7) Przy rozwiązaniu zadań można się konsultować z książkami, z innymi matematykami, ze mną. Nie ma to wpływu na ocenę. Chodzi o to, żeby rozumieć rozwiązanie.
(8) Termin oddawania rozwiązań: **1 czerwca**.
(9) W przypadku zadań o formach różniczkowych, naturalnie można się za nie zabierać, ale większość definicji będzie na wykładzie.

Zadania z AM 2.2

Zadanie 1 (teoria miary, 50 pkt)**.** Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie mierzalny o mierze dodatniej. Powiemy, że $x \in \mathbb{R}^n$ jest *punktem gęstości* zbioru A, jeśli

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu(B(x,\varepsilon) \cap A)}{\mu(B(x,e))} = 1,$$

gdzie $B(x,\varepsilon)$ oznacza kulkę o promieniu ε, zaś μ miarę Lebesgue'a. Niech A^g będzie zbiorem punktów gęstości zbioru A. Udowodnij, że $\mu(A \setminus A^g) + \mu(A^g \setminus A) = 0$. Wskazówka: wykorzystaj twierdzenie Vitaliego o pokryciach.

Zadanie 2 (teoria miary, 45+15 pkt)**.** Niech μ oznacza miarę Lebesgue'a na $\mathbb{R}$, zaś ν jakąś miarę borelowską na $\mathbb{R}$ o tej własności, że jeśli $\nu(A) > 0$, to również $\mu(A) = 0$ (to się nazywa absolutna ciągłość). Wykaż, że granica

$$g(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\nu(B(x,\varepsilon))}{\mu(B(x,\varepsilon))}$$

istnieje dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}$, ponadto dla dowolnego zbioru borelowskiego A zachodzi

$$\nu(A) = \int_A g(x)dx.$$

(*) Korzystając z twierdzenia Vitaliego uogólnij ten wynik na $\mathbb{R}^n$.
Uwaga! Proszę **nie** powoływać się w rozwiązaniu na twierdzenie Radona–Nikodyma.

Zadanie 3 (kombinatoryka, 50+10 pkt)**.** Niech p i q będą dodatnimi liczbami względnie pierwszymi. Definiujemy

$$\Sigma_{pq} = \left\{ \frac{k}{p} + \frac{l}{q} \colon 1 \leq k \leq p-1,\ 1 \leq l \leq q-1 \right\}.$$

Niech teraz dla $x \in [0,1]$ funkcja $f(x)$ będzie określona jako

$$f(x) = \#\Sigma_{pq} \cap (x, x+1).$$

Przedłużamy f przez 0 poza $[0,1]$. Oblicz transformatę Fouriera funkcji f. Wykorzystaj ją do obliczenia całki $\int_0^1 f(x)dx$.

Wskazówka: przedstaw f jako sumę funkcji charakterystycznych. Obliczywszy transformatę dla każdej z nich zmień sprytnie kolejność sumowania, tak aby wynik był możliwie najprostszy.

Zadanie 4 (teoria liczb, 60 pkt)**.** Niech p i q będą jak z zadania 3. Definiujemy $\langle x\rangle = \{x\} - \frac{1}{2}$, gdy $x \notin \mathbb{Z}$ oraz $\langle x\rangle = 0$ gdy $x \in \mathbb{Z}$. Określamy

$$s(k,l) = \sum_{j=0}^{l} \left\langle \frac{j}{l} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{jk}{l} \right\rangle$$

(suma Dedekinda). Wyraź $\int_0^1 f(x)dx$ (dla f jak z zadania 3) wykorzystując $s(p,q)$ i $s(q,p)$. Korzystając z obliczenia całki $\int_0^1 f(x)dx$ w poprzednim zadaniu, udowodnij prawo wzajemności sum Dedekinda:

$$s(p,q) + s(q,p) = \frac{1}{12}\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p} + \frac{1}{pq}\right) - \frac{1}{4}.$$

Zadanie 5 (analiza funkcjonalna, 50+10 pkt)**.** Niech Ω będzie podzbiorem otwartym $\mathbb{R}^n$. Niech $\mathcal{A}_\Omega$ będzie algebrą funkcji klasy C^∞ na Ω. Określamy na $\mathcal{A}_\Omega$ topologię: $f_n \to f$, jeśli dla każdego $k \geq 0$, ciąg $k-$tych pochodnych $f_n^{(k)}$ zbiega do $f^{(k)}$ niemal jednostajnie. Niech $x_0 \in \Omega$. Przypuśćmy, że $D\colon \mathcal{A}_\Omega \to \mathbb{R}$ spełnia następujące warunki:

(a) D jest liniowe, tzn $D(af + bg) = aD(f) + bD(g)$, dla $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $f, g \in \mathcal{A}_\Omega$.
(b) D spełnia regułę Leibniza, tzn. $D(fg) = f(x_0)D(g) + g(x_0)D(f)$.
(c) D jest ciągłe, tzn. $D(\lim f_n) = \lim D(f_n)$.

Wykaż, że istnieje takie v, że dla każdego $f \in \mathcal{A}_\Omega$, $D(f)$ jest pochodną kierunkową f w punkcie x_0 w kierunku v. Podaj przykład, że ostatni warune jest konieczny.

Zadanie 6 (topologia algebraiczna, 70 pkt)**.** Niech M będzie rozmaitością wymiaru n. Niech Z^k będzie przestrzenią form różniczkowych rzędu k, takich, że $d\omega = 0$. Niech B^k będzie przestrzenią form różniczkowych rzędu k takich, że $\omega \in B^k$, jeśli istnieje $(k-1)$-forma η taka, że $d\eta = \omega$. Niech

$$H^k(M) = Z^k/B^k.$$

Przestrzeń tą nazywamy k-tą grupą kohomologii de Rhama. Wiadomo, że dla kohomologii zachodzi *ciąg Meyera-Vietorisa*, który mówi, że jeśli $M = U \cup W$ i U, W podzbiory otwarte M, to

$$\cdots \to H^k(U) \oplus H^k(W) \to H^k(U \cap W) \to H^{k+1}(M) \to H^{k+1}(U) \oplus H^{k+1}(W) \to H^{k+1}(U \cap W) \to \dots$$

jest ciągiem dokładnym: obraz każdego odwzorowania jest jądrem następnego. Odwzorowania z $H^{k+1}(M) \to H^{k+1}(U)$, $H^{k+1}(M) \to H^{k+1}(W)$ oraz $H^{k+1}(U) \to H^{k+1}(U \cap W)$ zadane są przez obcięcia form: bierzemy formę i obcinamy ją do podzbioru.

Opisz pozostałe odwzorowania i udowodnij dokładność ciągu. Całe rozwiązanie można znaleźć w literaturze, trudność polega na przyswojeniu sobie sporej porcji materiału.

Zadanie 7 (geometria różniczkowa, 30+60 pkt)**.** Dla krzywej $\gamma = (x(t), y(t))$, $t \in [0,1]$, $\gamma(0) = \gamma(1) = (0,0)$ rozpatrujemy dwa funkcjonały:

$$S[\gamma] = \int_0^1 x(t)\dot{y}(t)dt, \quad L[\gamma] = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt.$$

Rozwiązując równania Eulera–Lagrange'a dla S przy utrzymanym L udowodnij, że spośród wszystkich krzywych zamkniętych o ustalonej długości, największe pole ogranicza okrąg.
Uwaga! $S[\gamma]$ jest równy (zorientowanemu) polu figury ograniczonej przez γ.
(*) Wykonaj to zadanie dla powierzchni. Możesz przyjąć, że $\Gamma = (x(t,s), y(t,s), z(t,s))$, gdzie $t, s \in [0,1]$ oraz $\Gamma(\partial[0,1]^2) = (0,0,0)$.

Zadanie 8 (geometria różniczkowa, 30 pkt). Niech ω będzie $k-$formą na rozmaitości. Wykaż, że dla dowolnego układu pól wektorowych $v_0, \ldots, v_k$ zachodzi wzór Cartana:

$$d\omega(v_0, \ldots, v_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i v_i \cdot \omega(v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_k) +$$
$$+ \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \omega([v_i, v_j], v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, \widehat{v_j}, \ldots, v_k).$$

Tutaj $v_i \cdot$ oznacza pochodną kierunkową, $[v_i, v_j]$ jest komutatorem (nawiasem Liego), zaś $\widehat{\cdot}$ oznacza pominięte wyrażenie.
Uwaga! We współrzędnych lokalnych zadanie jest zupełnie rachunkowe.

Zadanie 9 (układy dynamiczne, 30+10 pkt). Niech $T \colon [0,1] \to [0,1]$ będzie zadane wzorem $T(x) = 2x \mod 1$. Znajdź taką miarę μ postaci $g(x)dx$ (tzn. $\mu(A) = \int_A g$), taką, że $T_*\mu = \mu$, tzn. dla każdego mierzalnego A zachodzi $\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$.
Wykaż, że jeśli A jest takim zbiorem, że $T^{-1}(A) = A$, to A jest albo pełnej miary, albo miary zero.

Zadanie 10 (algebra liniowa, 15+20+25 pkt). Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru k nad $\mathbb{C}$. Niech $W = \Lambda^2 V$. W W oznaczamy przez P zbiór tych elementów, które są postaci $v \wedge v$, dla pewnego $v \in V$. Wykaż, że

(a) Jeśli $k = 3$, to $V = P$;
(b) Jeśli $k = 4$, to $w \in P$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w \wedge w = 0 \in \Lambda^4 V$;
(c) Jeśli $k > 4$, to istnieje $w \in W \setminus P$ takie, że $w \wedge w \neq 0$.

Uwaga! Osoba, która rozwiąże to zadanie, usłyszy o nim zabawną anegdotę.
Jeśli ktoś chce doczytać ogólnej teorii, hasłem jest 'zanurzenie Plückera'.

Zadanie 11 (analiza funkcjonalna, 60 pkt). Niech f będzie funkcją z przestrzeni L^s, gdzie $s \in [1, \infty)$. Dla jakich r transformata Fouriera $\widehat{f}$ należy do L^p?

Zadanie 12 (geometria różniczkowa, 50 pkt). Podaj przykład 2−formy różniczkowej na $\mathbb{C}P^2$, która jest zamknięta a nie jest dokładna.

Zadanie 13 (geometria różniczkowa, 50 pkt). Dla ustalonego $n > 1$ znajdź jawne odwzorowanie $F : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{R}^N$, dla jakiegoś dowolnego N, którego różniczka jest w każdym punkcie iniekcją, oraz jest ono $1-1$ na swój obraz.

Zadanie 14 (topologia, 30+10 pkt). Niech $F \colon B^n \to S^{n-1}$ będzie odwzorowaniem gładkim z kuli B^n na jej brzeg, takim, że F na brzegu jest identycznością. Niech ω będzie $(n-1)$ formą różniczkową na S^{n-1} taką, że $\int_{S^{n-1}} \omega \neq 0$. Korzystając z wzoru $\int_{S^{n-1}} \omega = \int_{S^{n-1}} F^*\omega$, udowodnij, że F nie może istnieć.
Wyjaśnij powyższy dowód w języku kohomologii de Rhama.