1. Zadania z AM 2.1

Zadanie 1. Niech $V = C([0,1])$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych. Wprowadźmy na V dwie normy

- $||f||_1 = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$;
- $||f||_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$.

Rozstrzygnij, czy istnieją pochodne cząstkowe, czy są liniowe, i czy istnieje pochodna zupełna funkcji $F(x) = x + 1$.

Zadanie 2. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ i $V \subset \mathbb{R}^m$ będą podzbiorami otwartymi. Przypuśćmy, że $F : U \to V$ jest klasy C^1 is ma następującą własność: dla dowolnej $g : V \to \mathbb{R}$ klasy C^1 rozpatrujemy funkcję $f : U \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem $f(x) = g(F(x))$. Załóżmy, że

$$DF(\nabla f) = \nabla g.$$

Wykaż, że DF jest przekształceniem ortogonalnym.

Zadanie 3. Niech M będzie zbiorem zadanym przez $F = 0$, gdzie $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką taką, że jeśli $F(x) = 0$, to $\nabla F(x) \neq 0$. Załóżmy, że $x \in M$, zaś v jest wektorem prostopadłym do $\nabla F(x)$. Udowodnij, że istnieje takie $\varepsilon > 0$ oraz odwzorowanie $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ takie, że $\gamma(0) = x$ oraz $\gamma'(0) = v$. Inaczej mówiąc, istnieje krzywa w M przechodząca przez x i styczna do v w punkcie x.

Zadanie 4. Wykaż, że standardowy zbiór Cantora jest homeomorficzny z $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ z topologią produktową. Na $\{0,1\}$ rozpatrujemy standardową topologię dyskretną.

Zadanie 5. Niech $1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, \ldots$ będzie utworzonym przez pierwsze cyfr w wyrażeniu 2^n. Wykaż, że 7 pojawia się w tym ciągu częściej niż 8.

Zadanie 6. Rozstrzygnij, czy funkcja

$$f(x, y) = x^4 + x^2y^6 - x^4y^8 + 4y^{10}$$

ma w punkcie $(0,0)$ minimum lokalne, czy też nie.

Zadanie 7. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie pozbiorem dyfeomorficznym ze wstęgą Möbiusa. Wykaż, że nie istnieje takie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ klasy C^1, że $F^{-1}(0) = M$ i ∇F nie znika nigdzie na M.

Zadanie 8. Niech $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją gładką, zaś c wartością niekrytyczną. Przypuśćmy, że zbiór $U = \{x\colon F(x) \le c\}$ jest zwarty i niech $M = \{x\colon F(x) = c\} = \partial U$. Rozpatrujemy funkcję $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \inf_{y\in M} ||y - x||^2.$$

Wykaż, że g jest klasy C^1 w pewnym zbiorze otwartym zawierającym M, ale g nie jest różniczkowalna we wszystkich punktach $\mathbb{R}^n$.