1. Indukcja

Zadanie 1. Wykaż, że $\sum_{i=1}^{n} n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Zadanie 2. Udowodnij, że $\sum_{i=1}^{n} n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Zadanie 3. Sprawdź, że $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

Zadanie 4. Niech $S_4(n) = 1^4 + \cdots + n^4$. Zakładając, ze S_4 jest wielomianem piątego stopnia o najwyższym wyrazie $\frac{1}{5}$, znajdź wzór na S_n.

Zadanie 5. Niech $S_k(n) = \sum_{i=1}^{n} n^k$. Udowodnij, że $S_k(n) = \frac{n^{k+1}}{5} + P_k(n)$, gdzie P_k jest wielomianem stopnia co najwyżej k.

Zadanie 6. Niech $a_1, \ldots, a_n \geq 1$ oraz $a_1, \ldots, a_n$ są tego samego znaku. Pokaż uogólnioną nierówność Bernoulliego $\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i) \geq 1 + a_1 + \cdots + a_n$.

Zadanie 7. Wywnioskuj *nierówność Bernoulliego*: $(1+x)^n \geq 1+nx$, gdy $x \geq -1$ oraz n naturalna. Pokaż, że oba te założenia są konieczne za pomocą kontrprzykładów na tę nierówność, gdy któreś założenie nie jest spełnione.

Zadanie 8. Niech $a_1, \ldots, a_n$ będą rzeczywiste dodatnie. Wtedy $\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n) \geq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$. Zastosuj indukcję.

2. Dwumian Newtona

Zadanie 9. Wykaż, że $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

Zadanie 10. Udowodnij, że jeśli $n > 0$, to $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \binom{n}{i} = 0$.

Zadanie 11. Wykaż tożsamość $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

Zadanie 12. Udowodnij, że $\sum_{i=0}^{m} \binom{n+i}{i} = \binom{n+m+1}{m}$.

Zadanie 13. Niech $n > 1$. Pokaż, że $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \cdot i \cdot \binom{n}{i} = 0$.

Zadanie 14. Dla jakich $0 \leq k \leq n$ liczba $\binom{n}{k}$ jest parzysta? Naszkicuj trójkąt Pascala aż do poziomu 31, zaznaczając tylko jasnym kolorem te pary (n, k), że $\binom{n}{k}$ jest parzyste, ciemnym zaś te, dla których $\binom{n}{k}$ jest nieparzyste. Jaki obrazek powstaje?

3. Ciągi

Zadanie 15. Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

Zadanie 16. Niech $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ oraz $b_m = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}$. Wykaż, że a_n jest ciągiem monotonicznie rosnącym, zaś b_m ściśle malejącym. Wywnioskuj stąd, że $\forall n, m \in \mathbb{N}; a_n \leq b_m$.

Zadanie 17. Niech a_n i b_m jak wyżej. Wykaż, że oba te ciągi mają granicę. Granicą tą jest ta sama liczba.

Zadanie 18. Niech n naturalna. Pokaż, że $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$.

Zadanie 19. Udowodnij, że ciąg $c_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ ma granicę, zawartą w przedziale $[0, 1]$. Granica nazywa się *stałą Eulera*.

Zadanie 20. Niech $d_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$. Wykaż, że $\lim d_n = \ln 2$.

Zadanie 21. Niech p_n będzie $n-$tą liczbą pierwszą. Wykaż, że ciąg $e_n = 1 + \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n}$ jest rozbieżny do nieskończoności.

Zadanie 22. Niech s_n będzie ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich, oraz $\lim s_n = s$. Wykaż, że $\lim \frac{1}{n}(s_1 + \cdots + s_n) = s$.

Zadanie 23. Niech s_n jak wyżej. Wykaż, że $\lim \sqrt[n]{s_1 \cdots s_n} = s$.

Zadanie 24. Korzystając z poprzedniego zadania oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$.

Zadanie 25. Niech $S_k(n)$ taka jak w zadaniu 5. Wykaż, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_k(n)}{n^{k+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}}{n^k}$. Oblicz tę ostatnią granicę.

Zadanie 26. Niech $p_1, \ldots$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich takich, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_n}{p_1+\cdots+p_n} = 0$. Niech też s_n będzie ciągiem takim, że $\lim s_n = s$. Wykaż, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{s_1p_n+s_2p_{n-1}+\cdots+s_np_1}{p_1+\cdots+p_n} = s$.

Zadanie 27. Niech teraz $p_1, \ldots$ i $q_1, \ldots$ będą ciągami liczb rzeczywistych dodatnich, takich że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_n}{p_1+\cdots+p_n} = 0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{q_n}{q_1+\cdots+q_n} = 0$. Niech $r_n = p_1q_n + p_2q_{n-1} + \cdots + p_nq_1$. Pokaż, że zachodzi także $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{r_n}{r_1+\cdots+r_n} = 0$.

Zadanie 28. Niech $a_1, \ldots, b_1, \ldots$ będą dwoma ciągami liczb rzeczywistych, przy czym $b_i > 0$, $\lim\frac{a_n}{b_n} = s$ oraz ciąg $c_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ jest rozbieżny. Wykaż, że $\lim\frac{a_1+\cdots+a_n}{b_1+\cdots+b_n} = s$.

Zadanie 29. Dane są dwa ciągi $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$ takie, że $b_i > 0$, $\lim\frac{a_n}{b_n} = s$ oraz szereg $c_n(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \ldots$ jest zbieżny dla $|t| < 1$ i rozbieżny dla $t = 1$. Udowodnij, że $a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n + \ldots$ jest zbieżny dla $|t| < 1$ oraz $\lim\limits_{t\to 1^-}\frac{a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_nt^n+\ldots}{b_0+b_1t+b_2t^2+\cdots+b_nt^n+\ldots} = s$.

Zadanie 30. Niech $s_0, s_1, \ldots$ taki, że $\lim s_n = s$. Wtedy $lim_{t\to\infty}(s_0 + s_1t + \frac{s_2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{s_n}{n!}t^n + \ldots)e^{-t} = s$.

Zadanie 31. Ciąg a_n określony jest rekurencyjnie: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_{n-1}}$. Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Zadanie 32. Niech x rzeczywista dodatnia. Określamy $b_1 = 1$, $b_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + \frac{x}{b_n})$. Oblicz $\lim b_n$. Omów zachowanie się ciągu, gdy x jest ujemna.

Zadanie 33. Niech $a, b > 0$. Określamy ciągi a_n i b_n następująco: $a_1 = \frac{a+b}{2}$ i $b_1 = \sqrt{ab}$. $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$, $b_2 = \sqrt{a_1b_1}$. Ogólnie $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ i $b_{n+1} = \sqrt{a_nb_n}$. Wykaż, że oba te ciągi dążą do tej samej granicy, nazywanej średnią arytmetyczno–geometryczną.

Zadanie 34. Udowodnić zbieżność ciągu $\sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \ldots}}}}$. Obliczyć granicę.

Zadanie 35. Oblicz granicę $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$.

Zadanie 36. Znaleźć granicę $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$.

Zadanie 37. Ciąg $a_n > 0$ jest podaddytywny, tj. $a_{n+m} \le a_m + a_n$. Wykaż, że $\lim\frac{a_n}{n}$ istnieje i jest równe $\inf_{n\in\mathbb{N}}\frac{a_n}{n}$.

Zadanie 38. Dla jakiego α ciąg $a_n = n^\alpha(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ ma skończoną granicę różną od zera?

Zadanie 39. Oblicz granicę $\sqrt[3]{n^3} - \sqrt[3]{n^3 - 3n^2 + 2n}$.

Zadanie 40. Podaj przykład ciągu a_n, którego wszystkie wyrazy są jego punktami skupienia.

Zadanie 41. Niech liczby $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ przyjmują jedną z trzech wartości: -1, 0 lub 1. Wtedy mamy: $\varepsilon_0\sqrt{2 + \varepsilon_1\sqrt{2 + \varepsilon_2\sqrt{2 + \ldots}}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n}{2^n}\right)$. Lewą stronę interpretujemy jako granicę: $f_n = \varepsilon_0\sqrt{2 + \varepsilon_1\sqrt{2 + \cdots + \varepsilon_n\sqrt{2}}}$.

Zadanie 42. Wykaż, że dla kazdego x z przedziału $[-2, 2]$ istnieje taki ciąg ε_i określony jak w zadaniu wyżej, że $x = \lim f_n$. Dla jakich x ten ciąg jest wyznaczony jednoznacznie?

Zadanie 43. Dany jest ciąg a_n. Podciąg a_{2n} ma granicę a. Podciąg a_{2n+1} ma granicę b. Podciąg a_{3n} ma granicę c. Udowodnij, że $a = b = c$ i ciąg $\lim a_n = a$.

Zadanie 44. Niech $\{a_{ij}\}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$ będzie macierzą liczb rzeczywistych dodatnich. Określmy G_i jako średnią geometryczną liczb $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ (średnia geometryczna wierszy). Niech A_j będzie średną arytmetyczną kolumn: $a_{j1}, \ldots, a_{jm}$. Wykaż, że średnia geometryczna liczb $A_1, \ldots, A_n$ jest większa od średniej arytmetycznej liczb $G_1, \ldots, G_n$.

Zadanie 45. Zbadać zbieżność i ewentualnie znaleźć granicę ciągu $c_n = \frac{3}{1-\sqrt[n]{8}} - \frac{5}{1-\sqrt[n]{32}}$.

4. Ułamki łańcuchowe

5. Funkcje ciągłe

Zadanie 46. Czy istnieje taka funkcja f na prostej, która w żadnym punkcie nie ma granicy?

Zadanie 47. Czy istnieje taka funkcja f, która w każdym punkcie ma granicę 0, ale nie istnieje taki odcinek (a,b), że $f|_{(a,b)} \equiv 0$?

Zadanie 48. Pokazać przykład funkcji skończonej, która nie jest lokalnie ograniczona.

Zadanie 49. Znaleźć przykład funkcji, która na zbiorze Cantora ma granicę równą ∞.

Zadanie 50. Wykazać, że $\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x$.

Zadanie 51. Niech $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ciągła, oraz $\lim\limits_{x\to\infty} = c$ i $\lim\limits_{x\to 0} = d$, przy czym $c, d \leq \infty$. Wtedy f jest ograniczona na $\mathbb{R}^+$.

Zadanie 52. Niech f ciągła na $[0,1]$ oraz istnieje funkcja odwrotna. Wykazać, że f jest monotoniczna.

Zadanie 53. Niech f i g będą wklęsłymi funkcjami z $\mathbb{R}^+$ do $\mathbb{R}^+$. (f jest wklęsła, jeśli $\forall\lambda \in [0,1]; f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$). W ilu punktach mogą przecinać się wykresy f i g?

Zadanie 54. Niech f ściśle wypukła dana z góry. Niech k liczba naturalna. Skonstruować ściśle wypukłą funkcję g_k, która przecina f w dokładnie k punktach.

Zadanie 55. Niech $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ciągła oraz $\forall x \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x+n) = 0$. Czy z tego wynika, że $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$?.