Zadania z wypukłości funkcji.

Zasadniczo nie było jeszcze pochodnej, więc kryterium wypukłości funkcji nie musi być jeszcze znane. Nie zakładamy, że funkcje są klasy C^2. Zakładamy, że znana jest wypukłość/wklęsłość funkcji x^α, $\ln x$, e^x. Poniższe zadania są propozycją, nie musisz (pewnie i tak się nie uda, chyba, że dwie te same osoby będą na zmianę chodziły do tablicy; możesz zrobić coś innego. Tylko nie rób zadania: w ilu punktach mogą się przecinać wykresy dwóch funkcji wypukłych? Bo jest do domu.

ZADANIE 1. Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotoniczna. Wtedy f jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy f^{-1} jest wklęsła.

ZADANIE 2. Niech f i g będą funkcjami wypukłymi. Wtedy wypukła kombinacja liniowa $af + bg$ $a, b > 0$ jest wypukła. Co może się dziać bez założenia $b > 0$?

ZADANIE 3. Niech f i g wypukłe. Czy fg musi być wypukła? Co, gdy założymy $f, g > 0$? A gdy dodatkowo założymy monotoniczność?

ZADANIE 4. Niech f ciągła na $[a,b]$ oraz f spełnia warunek $\forall x, y \in [a,b] f(\frac{x+y}{2}) < \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$. Wtedy f jest wypukła.

ZADANIE 5. Niech f wypukła na $[a,b]$. Wykazać, że f jest ciągła na (a,b). Czy musi być lewo-/prawostronnie ciągła w punktach a i b?

ZADANIE 6. Niech f wypukła na $[a,b]$ oraz f malejąca w punkcie $x \in [a,b]$. Wykaż, że nie istnieje taki punkt $y \in [a,x]$, że f rosnąca w y.

ZADANIE 7. Odwrócenie poprzedniego. f rosnąca w $y \in [a,b]$, to nie istnieje takie $x \in [y,b]$, że f malejąca w x.

ZADANIE 8. Niech f wypukła na $\mathbb{R}$. Wtedy każda prosta przecina wykres f w co najwyżej dwóch punktach, albo częściowo zawiera się w wykresie.

ZADANIE 9. Niech f wypukła na $\mathbb{R}$ i ograniczona. Wtedy f jest stała.

W razie czego zadanie ósme i dziewiąte możesz dać do domu. Ósme jest oczywiście wskazówką do dziewiątego.

Jeszcze raz bardzo dziękuję i polecam się na przyszłość,
Maciek Borodzik