Trzeci zestaw zadań z Analizy I.

Termin oddania zadań: 20 grudnia 2005 o 14:00.

Zadanie 1. Oblicz granicę:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^3}{n} \left(\frac{\sqrt[2]{2}}{(\ln 2)^3} + \frac{\sqrt[3]{3}}{(\ln 3)^3} + \cdots + \frac{\sqrt[n]{n}}{(\ln n)^3} \right).$$

Zadanie 2. Niech dane będą dwa ciągi $a_0, \ldots,$ i $b_0, \ldots,$ takie że:

$$b_n > 0,$$

$$b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots \begin{cases} \text{jest zbieżny dla } |t| < 1 \\ \text{jest rozbieżny dla } t = 1, \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = s$$

Wykaż, że w takiej sytuacji szereg:

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots \text{jest zbieżny dla } |t| < 1.$$

oraz zachodzi:

$$\lim_{t\to 1^-} \frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots}{b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots} = s.$$

Zadanie 3. Skonstruuj taki ciąg a_n liczb rzeczywistych, że szereg:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_n^k$$

jest zbieżny dla $k = 1$ i $k > 3$ oraz rozbieżny dla $k = 3$.

Zadanie 4. Niech $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ będzie funkcją ciągłą i ściśle wypukłą. Dla jakich k istnieje taka funkcja $g_k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, ściśle wypukła, taka że wykresy g_k i f przecinają się dokładnie w k miejscach.

Zadanie 5. „Słupki". Zbadaj zbieżność i bezwzględną zbieżność następujących szeregów:

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n} \right)$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} n \ln n \sin \frac{2}{n^3}$$

(c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + 3n} - n \right)$$

(d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((2n)!!^2)}{(2n)!},$$

gdzie $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n$.