Szósty zestaw zadań z Analizy I.

Termin oddania zadań: wtorek, 11 kwietnia 2006 o 14:00.

Zadanie 1. Niech $P(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ będzie funkcją wymierną, tzn. A i B są wielomianami zmiennej z. Wykaż, że P traktowana jako funkcja z $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ do $\hat{\mathbb{C}}$ jest funkcją ciągłą (przyjmij, że $y_n \to \infty$, gdy $\forall N > 0 \, \exists n_0 : \forall n > n_0$ zachodzi $|y_n| > N$, równoważnie $y_n \to \infty \iff \frac{1}{y_n} \to 0$). Udowodnij także, że P jest $1-1$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest homografią.

Zadanie 2. Znajdź ogólną postać homografii, która

(a) przeprowadza okrąg jednostkowy na prostą rzeczywistą.
(b) przeprowadza okrąg jednostkowy na siebie samego.
(c) przeprowadza dysk jednostkowy na siebie.

Zadanie 3. Dla czwórki liczb $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ określamy ich *dwustosunek* (ang. cross-ratio) jako iloraz

$$CR(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_4} \cdot \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_3}.$$

Wykaż, że homografia zachowuje dwustosunek, to znaczy

$$CR(h(z_1), h(z_2), h(z_3), h(z_4)) = CR(z_1, z_2, z_3, z_4).$$

Zadanie 4. Oblicz całki.

(a) $\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx$
(b) $\int x \ln x \, dx$
(c) $\int \frac{1}{\sin x} dx$.

Zadanie 5. Całkując przez części wykaż, że $J_m = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x \, dx$ jest równe $\frac{(m-1)!!}{m!!} \frac{\pi}{2}$ dla m parzystych oraz $\frac{(m-1)!!}{m!!}$ dla m nieparzystych.

Zadanie 6. Korzystając z zadania (5) oraz z tego, że $\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$ dla $0 < x < \pi/2$ wykaż, że

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2.$$

Zadanie 7. Rozpatrujemy całkę $G(a,b) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi}}$. Podstawiając $\sin \phi = \frac{2a \sin \theta}{(a+b) + (a-b) \sin^2 \theta}$ wykaż, że (czyste rachunki)

$$G(a,b) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cos^2 \theta + ab \sin^2 \theta}} = G\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right).$$

Wyraź $G(a,b)$ w terminach średniej geometryczno–algebraicznej liczb a i b.

Uwaga. Jeśli udało Ci się znaleźć jawny wzór na funkcję podcałkową, lub na liczby $G(a,b)$, sprawdź jeszcze raz rachunki.

Maciej Borodzik