Siódmy zestaw zadań z Analizy I.

Termin oddania zadań: wtorek, 9 maja 2006 o 14:00.

Zadanie 1. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie taka, że $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx = M \leq \infty$. Określamy funkcję

$$\widehat{f}(t) \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(x)dx.$$

Wykaż, że $\widehat{f}(t)$ jest funkcją ciągłą i ograniczoną, nawet jeśli $f(x)$ nie jest ciągła.

Zadanie 2. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną. Wykaż, że $\forall \varepsilon > 0$, istnieje taka ciągła funkcja $f_\varepsilon x$ na $[a, b]$ taka, że $\int_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)|dx < \varepsilon$. Wskazówka. Można (ale nie trzeba) przybliżać funkcję f funkcjami kawałkami stałymi.

Zadanie 3. Niech $f(x)$ będzie funkcją różniczkowalną na $[a, b]$ oraz f' ciągła na $[a, b]$. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x) \sin nx \, dx = 0.$$

Zadanie 4. Niech $f_n(x) = n \sin \sqrt{4n^2\pi^2 + x^2}$. Oblicz granicę ciągu $f_n(x)$ i wykaż, że f_n jest zbieżny niemal jednostajnie do swojej granicy.

Zadanie 5. Niech

$$z_n = \left(1 + \frac{i}{\sqrt{1}}\right)\left(1 + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\dots\left(1 + \frac{i}{\sqrt{n}}\right).$$

Wykaż, że

(a) Odległość z_n do z_{n+1} jest stale równa 1.

(b) Jeśli $z_n = r_n e^{i\phi_n}$ dla $0 < \phi_n - \phi_{n-1} < \pi/2$ i $r_n > 0$, to $\frac{r_n - r_{n-1}}{\phi_n - \phi_{n-1}} \to \frac{1}{2}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{r_n}{\phi_n} = \frac{1}{2}$.

Zadanie 6. Zapisujemy

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xw + w^2}} = P_0(x) + P_1(x)w + P_2(x)w^2 + \dots + P_n(x)w^n + \dots, \tag{1}$$

tak że dla ustalonego x wzór (1) daje rozwinięcie Taylora funkcji $w \to (1-2xw+w^2)^{-1/2}$. Pokaż, że

(a) $P_i(x)$ jest wielomianem stopnia i.

(b) $P_n(x) = \frac{2n-1}{x} P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x)$ (zróżniczkuj (1) po w).

(c) P_i są wielomianami Legendre'a.

Zadanie 7. Zbadaj zbieżność całek niewłaściwych w zależności od parametru λ.

(a) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x^\lambda + \sin x} dx$, $\lambda > 0$.

(b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^\lambda$.

(c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [\ln(\cos x - \sin x)]^\lambda dx$.

Wskazówka: $\sin x = \frac{1}{x^\lambda}[(x^\lambda + \sin x)\sin x - \sin^2 x]$.

Maciej Borodzik