Piąty zestaw zadań z Analizy I.

Termin oddania zadań: 21 marca 2005 o 16:00.

ZADANIE 1. Niech x będzie dostatecznie małą liczbą dodatnią. Która z wielkości jest większa:

(a) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/2}$, czy $\cos\left(x\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$?
(b) $\frac{1}{e}(1+x)^{1/x}$, czy $\ln(1+x) - \frac{\sin^3 x}{8}$?
(c) e^{-1/x^2}, czy e^{-1/x^3}?

Wszystkie odpowiedzi należy udowodnić.

ZADANIE 2. Korzystając z faktu, że $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots$ znajdź rozwinięcie w szereg Taylora funkcji $\operatorname{arc\,tg} x$ w otoczeniu zera.

ZADANIE 3. Niech $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$. Udowodnij, że równanie $P_n(x) = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste dla n nieparzystych i nie ma rozwiązań rzeczywistych dla n parzystych. Wskazówka: zastosuj indukcję po n.

ZADANIE 4. Niech f będzie wielomianem takim, że $\forall p \in \mathbb{R}$ równanie $f(x) = p$ ma wyłącznie pierwiastki rzeczywiste. Wykaż ściśle (geometrycznie jest to oczywiste ale chodzi o inny dowód), że $\deg f \leq 2$.

ZADANIE 5. Czy istnieje taka funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją gładką, oraz zbiór skończony S, że $\forall p \in \mathbb{R} \setminus S$ przeciwobraz $f^{-1}(p)$ składa się dokładnie z dwóch punktów, podczas gdy $f^{-1}(s)$ jest skończony, ale dowolnej mocy dla $s \in S$.

ZADANIE 6. Wielomiany Legendre'a definiujemy jako $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, tak że $\deg P_n = n$. Udowodnij (kolejność zadań jest nieprzypadkowa).

(a) $P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x)$ (wzór rekurencyjny).
(b) $\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$, gdzie δ_{nm} jest deltą Kroneckera. Wskazówka: punkt (a) i indukcja.
(c) $(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$.

Maciej Borodzik