Ósmy i ostatni zestaw zadań z Analizy I.

Termin oddania zadań:
środa, 31 maja 2006 o 16:00.

Zadanie 1. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie pewną funkcją całkowalną na $\mathbb{R}$. Określamy funkcję

$$\widehat{f}(t) \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(x)dx.$$

Wykaż, że $\frac{d}{dt}\widehat{f}(t) = \widehat{g}(t)$, gdzie $g(x) = ixf(x)$. Możesz dodać wszystkie sensowne założenia o funkcji f, które będą usprawiedliwiały wykonywane przez Ciebie operacje. Te założenia muszą jednak być jawnie wypisane.

Zadanie 2. Niech $r > 2$. Rozpatrujemy zbiór

$$A_r = \left\{ x \in [0,1] : \exists\, k_x > 0\ \forall\, p, q \in \mathbb{N} \colon \left| x - \frac{p}{q} \right| > \frac{k_x}{q^r} \right\}$$

liczb niewymiernych, które się źle przybliżają liczbami wymiernymi. Wykaż, że miara zewnętrzna zbioru $[0,1] \setminus A_r$ jest równa zeru.

Wskazówka: Rozpisz zbiór $[0,1] \setminus A_r$ jako przecięcie sum pewnych zbiorów. Dla ułatwienia możesz założyć, że miara zewnętrzna jest miarą (zob. Birkholc, „Analiza matematyczna. Funkcje wielu zmiennych").

Zadanie 3. Niech zbiór A_r będzie taki, jak w Zadaniu 2. Wykaż, że całka

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s (\sin \pi x)^{(\sin y\pi x)}} \tag{1}$$

jest zbieżna $y \in A_r$ gdy $s > r + 1$ i rozbieżna dla $y \notin A_r$ gdy $s < r + 1$.

Zadanie 4. (*) Znajdź górne ograniczenie na całkę (1) dla ustalonych r i $s > r + 1$ w terminach k_x określonego w Zadaniu 2. Znajdź ograniczenie dolne. Przedyskutuj zbieżność całki dla $s = r + 1$.

Zadanie 5. Dane są cztery punkty z_1, z_2, z_3 i z_4 na płaszczyźnie $\mathbb{C}$ takie, że ich dwustosunek jest liczbą rzeczywistą. Wykaż, że te punkty leżą na jednej prostej albo na jednym okręgu.

Uwaga. To zadanie można zrobić w dwóch linijkach, albo wcale.

Zadanie 6. Znajdź warunek konieczny i dostateczny (oraz w miarę łatwy do sprawdzenia) na wielomiany $P(x)$ i $Q(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, aby całka $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ była zbieżna.

Zadanie 7. Wykaż, że dla dowolnej funkcji bezwzględnie całkowalnej na $\mathbb{R}^+$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} f(x) \sin nx dx = 0.$$