Zestaw gwiazdkowyzadań z Analizy I.

Wszystkie zadania są gwiazdkowe, to znaczy dla chętnych.

Termin oddania: wtorek, 9 stycznia 2006

Zadanie 1. Niech $\phi(x)$ będzie funkcją ciągłą, która dla dostatecznie dużych x zadaje się przez szereg:

$$\phi(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_k}{x^k} + \ldots,$$

gdzie a_k są rzeczywiste (można najpierw założyć dla uproszczenia, że są dodatnie). Wykaż, że szereg

$$\phi(1) + \phi(2) + \cdots + \phi(n) + \ldots$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $a_0 = a_1 = 0$.

Zadanie 2. Niech $0 < q < 1$. Wykaż, że

$$\frac{1-q}{1+q}\left(\frac{1-q^2}{1+q^2}\right)^{1/2}\left(\frac{1-q^4}{1+q^4}\right)^{1/4}\left(\frac{1-q^8}{1+q^8}\right)^{1/8}\cdots = (1-q)^2$$

Zadanie 3. Niech z będzie liczbą zespoloną o module 1 i $z \neq 1$. Wykaż, że szereg:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$$

jest warunkowo zbieżny.

Zadanie 4. Rozpatrzmy ciąg $2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, 8, \ldots$ składający się z pierwszej cyfry kolejnej potęgi dwójki, tj: $\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{8}, \mathbf{1}6, \mathbf{3}2, \mathbf{6}4, \mathbf{1}28, \mathbf{2}56, \mathbf{5}12, \ldots$. Która z liczb 8 i 9 pojawia się w tym ciągu częściej?

Wskazówka: Dla dowolnej liczby niewymiernej x ciąg $nx - [nx]$ jest równomiernie rozłożony na zbiorze $[0, 1]$.

Zadanie 5. *Do tego zadania przydaje się elementarna znajomość całki Riemanna* Niech ϕ dowolna rzeczywista dodatnia. Pokazać, że

$$\prod_{i=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\phi}{2^i}\right) = \frac{\sin\phi}{\phi}.$$

Wstawiając $\phi = \frac{\pi}{2}$ wykazać, że

$$\frac{1}{2^n}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}} + \cdots + \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ razy}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{\pi}.$$