Drugi zestaw zadań z Analizy I.

Termin oddania zadań: poniedziałek, 21 listopada 2005, przed 12:00

Zadanie 1. Niech p_n będzie ciągiem liczb dodatnich, takim, że $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p_1+\cdots+p_n} = 0$. Niech też s_n będzie ciągiem liczb dodatnich, takim, że $\lim_{n\to\infty} = s$. Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n s_1 + p_{n-1}s_2 + \cdots + p_1 s_n}{p_1 + \cdots + p_n} = s.$$

Uwaga! Zadanie proszę rozwiązać elementarnie, bez powoływania się na twierdzenia spoza wykładu lub ćwiczeń!

Zadanie 2. Niech $p_1, \ldots, p_k$ będą wszystkimi liczbami pierwszymi zawartymi między 1 a ustaloną liczbą naturalną n. Niech $a_n = \ln n! - \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{n}{p_k} \right\rfloor \ln p_k$. Wykaż, że ciąg $\frac{a_n}{n}$ jest ograniczony.

Wskazówka: Dla szereg $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\ln m}{m^2}$ *jest zbieżny. Skorzystaj też z tego, że* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = e$.

Zadanie 3. Niech x będzie ustaloną liczbą ujemną. Wykaż, że istnieje takie rzeczywiste α, że ciąg $b_0 = \alpha$, $b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{x}{b_n}\right)$ jest:

(a) okresowy o okresie 2, tj. $b_{n+2} = b_n$.
(b) okresowy o okresie 3, tj. $b_{n+3} = b_n$.
(*) okresowy o dowolnym, z góry zadanym okresie będącym liczbą pierwszą.
(**) okresowy o dowolnym okresie.

Zadanie 4. Niech $f(x)$ będzie zadana wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & : x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x & : x \in [\frac{1}{2}, 2] \end{cases}$$

Ustalmy $a \in [0,1]$. Określamy $a = a_0$, $a_n = f(a_{n-1})$. Wykaż, że

(a) Albo ciąg a_n stabilizuje się, tj. dla dostatecznie dużych N, $a_N = a_{N+1} = \ldots$, albo $\lim_{n\to\infty} a_n$ nie istnieje. Chociaż mamy $f(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$ i $f(0) = 0$.
(*) Dla ustalonego m istnieje takie a, że ciąg a_n jest okresowy o okresie m.
(**) Zbiór punktów takich, $a \in [0,1]$ że istnieje takie N oraz m, że dla wszystkich $n \geq N$ zachodzi $a_{n+m} = a_n$ (ciąg a_n jest okresowy od pewnego miejsca) jest gęsty na odcinku $[0,1]$.
(*) Poszukaj (można eksperymentalnie) związku punktu (a) z wartością pochodnej $f'(\frac{2}{3})$ i $f'(0)$.

Zadanie 5. Udowodnij, że dla każdego naturalnego $m \geq 1$, $\binom{2m+1}{m} \leq 4^m$. Wykaż, że jeśli $p_{k+1}, \ldots, p_n$ są wszystkimi liczbami pierwszymi między $m+2$ a $2m$, to $p_{k+1} \ldots p_n$ dzieli $\binom{2m+1}{m}$, a zatem $p_{k+1} \ldots p_n \leq 4^m$.

Zadanie 6. **(*)** Z poprzedniego zadania wywnioskuj, że iloczyn wszystkich liczb pierwszych mniejszych od m jest mniejszy od 4^m