Czwarty zestaw zadań z Analizy I.

Termin oddania zadań: 24 stycznia 2005 o 16:00.

Zadanie 1. Niech $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ będzie funkcją ciągłą i ściśle wypukłą. Dla jakich k istnieje taka funkcja $g_k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, ściśle wypukła, taka że wykresy g_k i f przecinają się dokładnie w k miejscach.

Zadanie 2. Niech f będzie hölderowska na ograniczonym przedziale (a, b). Udowodnij, że istnieje skończona granica $\lim_{x \to a^+} f(x)$ oraz $\lim_{x \to b^-} f(x)$.

Zadanie 3. Dla jakich α zadana funkcja na $[-1, 1]$ jest Hölderowska ze stałą α? Wystarczy sprawdzić w otoczeniu zera. (Dlaczego?)

(a) $\sqrt[n]{|x|}$.
(b) $|x|^{|x|}$.
(c) $x \ln |x|$. Czy ta funkcja jest lipschitzowska na $[-1, 1]$?

Zadanie 4. Funkcję ciągłą na przedziale (a, b) nazwiemy *absolutnie ciągłą*, jeśli dla każdego ε istnieje takie δ, że jeśli dane są przedziały $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ o łącznej długości mniejszej niż ε, to $\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \delta$.

Wykaż, że funkcja $h : [0, 1] \to [0, 1]$, która przeprowadza zbiór Cantora na cały odcinek (jest stała poza zbiorem Cantora, była na wykładzie) jest jednostajnie ciągła, ale nie jest absolutnie ciągła.

Zadanie 5. Wykaż, że każda funkcja lipschitzowska jest absolutnie ciągła. Pokaż, że funckja $\sqrt[n]{|x|}$ jest absolutnie ciągła na zbiorze $[-1, 1]$.

Zadanie 6. Niech dany będzie ciąg $\frac{p_n}{q_n}$ zbieżny do liczby niewymiernej. Wykaż, że $\lim_{n \to \infty} q_n = \infty$.

Zadanie 7. Dla ustalonego α oszacuj ilość ściśle dodatnich rozwiązań równania $\sin x = \alpha x$. Dokładniej, znajdź takie $l(\alpha)$, że ilość dodatnich rozwiązań równania $\sin x = \alpha x$ należy do przedziału $[l(\alpha) - \frac{1}{2}, l(\alpha) + \frac{1}{2}]$.

Maciej Borodzik