

Aneks do zestawu zadań, które będziemy robić na ćwiczeniach.

Zbieżność jednostajna i przybliżanie wielomianami.

*Proszę nie oddawać tych zadań na kartce,
chyba że ktoś bardzo musi.*

ZADANIE 1. Czy każdą funkcję f klasy C^1 na odcinku $[0, 1]$ da się przybliżyć wielomianami f_n , tak, że $f_n \rightarrow f$ w normie C^1 ? Co z normą C^k ?

ZADANIE 2. Rozważmy funkcje klasy C^1 na odcinku $[0, 1]$. Niech $\alpha, \beta > 0$. Rozpatrujemy $\|f\|_{\alpha, \beta} = \alpha\|f\|_{sup} + \beta\|f'\|_{sup}$. Wykaż, że $\|f\|_{\alpha, \beta}$ jest normą równoważną normie $\|f\|_{C^1}$.

ZADANIE 3. Niech B będzie kulą o promieniu 1 w przestrzeni $C^1[0, 1]$. Wykaż, że z każdego ciągu f_n elementów z B można wybrać podciąg zbieżny jednostajnie.

ZADANIE 4. Podaj przykład takiego ciągu z Zadania 3, że granica f_n nie leży w B .

ZADANIE 5. Niech $\alpha = \{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ będzie ciągiem liczb dodatnich. Rozpatrujemy przestrzeń

$$C_{\alpha}[0, 1] = \left\{ f \in C^{\infty}[0, 1] : \|f\|_{\alpha} \stackrel{def}{=} \alpha_0\|f\|_{sup} + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\|f^{(i)}\|_{sup} < \infty \right\}.$$

Wykaż, że dla każdego ciągu α $\|\cdot\|$ jest normą. Udowodnij jej zupełność. Wykaż, że C_{α} jest zawsze niepusta.

ZADANIE 6. Podaj przykład ciągu α i funkcji f klasy C^{∞} na $[0, 1]$, że $f \notin C_{\alpha}$. Znajdź wtedy taki ciąg β , że $f \in C_{\beta}$.

ZADANIE 7. Niech α i β będą ciągami, przy czym $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = M < \infty$. Wykaż, że $C_{\alpha} \subset C_{\beta}$.

ZADANIE 8. Wykaż, że C_{α} jest gęsta w $C[0, 1]$.

ZADANIE 9. Niech dany będzie ciąg f_n funkcji ciągłych na $[0, 1]$ takich, że $|f_n| < 1$ i lipschitzowskich o stałych Lipschitza L_n , przy czym $L_n \not\rightarrow \infty$. Wykaż, że z f_n można wybrać podciąg jednostajnie zbieżny.

ZADANIE 10. Udowodnij tezę Zadania 2 przy założeniu, że f_n są hölderowskie ze stałą α_n i współczynnikiem C_n , przy czym $\alpha_n \geq \alpha_0 > 0$ i $C_n \not\rightarrow \infty$.

ZADANIE 11. Niech f_n będzie ciągiem wielomianów na \mathbb{R} takim, że f_n jest zbieżny jednostajnie. Co można powiedzieć o granicy takiego ciągu? Co można więcej powiedzieć o zbieżności?