1. Zadania z AM 1.2

Lista zadań będzie sukcesywnie uzupełniana. Wskazane jest robienie samodzielne zadań. Można przyjść i sie zapytać, czy dane rozwiązanie jest poprawne.

Zadanie 1.1. Wykaż, że dla $x \geq 0$ zachodzi $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

Zadanie 1.2. Oblicz $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

Zadanie 1.3. Oblicz pochodną $\frac{d^{1000}}{dx^{1000}}[(1-x^2)^2(1+x)]$.

Zadanie 1.4. Niech $F(x) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^5}$. Niech $M = 1000!\frac{d^{1000}F}{dx^{1000}}(0)$. Wykaż, że M jest liczbą sposobów, na jakie można rozmienić 1000 złotych na monety 1, 2 i 5 złotowe.

Zadanie 1.5. Niech f będzie taką funkcją określoną w pewnym otoczeniu 0, że $f(x) = 1 + kx + o(1)$ dla pewnego $k \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że

$$\lim_{x \to 0} f(x)^{1/k} = e^k.$$

Zadanie 1.6. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dwukrotnie różniczkowalna. Dla $i = 0, 1, 2$ niech $M_i = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(i)}(x)|$ (powszechnie przyjęta konwencja jest taka, że $f^{(0)} = f$). Przypuśćmy, że $M_0, M_1, M_2 < \infty$. Udowodnij, że $M_1^2 \leq 2M_0M_2$.

Zadanie 1.7. Znajdź przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x + |\sin 2x|$ oraz $g(x) = \frac{x^2}{2^x}$.

Zadanie 1.8. Niech A będzie macierzą $n \times n$. Niech $F(t) = \det(I + tA)$, gdzie I jest macierzą jednostkową. Wykaż, że $F'(0) = \operatorname{Tr} A$.

Zadanie 1.9. Wykazać, że dla dowolnych $x > 0$ zachodzą nierówności:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

Zadanie 1.10. Korzystając z poprzedniego zadania wykaż, że dla dowolnego $x > 0$ zachodzi $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$. Udowodnij, że istnieje granica $\lim_{n \to \infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$.

Zadanie 1.11. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie klasy C^1 i $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$. Przypuśćmy, że istnieje dokładnie k punktów $x_1, \ldots, x_k$ o tej własności, że $f'(x_k) = 0$. Wykaż, że dla dowolnego $y \in \mathbb{R}$ zbiór $f^{-1}(-\infty, y)$ składa się pewnej liczby przedziałów $j(y)$, przy czym $j(y) \leq k + 1$.

Zadanie 1.12. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie wypukła. Wykaż, f nie ma ani jednego maksimum lokalnego i co najwyżej jedno minimum lokalne. Jeśli ponadto f ma jedno minimum lokalne, to jest to również minimum globalne.

Zadanie 1.13. Dla z góry ustalonego $N \geq 0$ skonstruuj dwie funkcje wypukłe z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, których wykresy mają dokładnie N punktów wspólnych.

Zadanie 1.14. Uzasadnij, że spośród wszystkich 2012-kątów *wpisanych* w okrąg o promieniu 1 *największe* pole ma 2012-kąt foremny.

Zadanie 1.15. Wykaż, że spośród wszystkich 23122012-kątów *opisanych* na okręgu, *najmniejsze* pole ma 23122012-kąt foremny.

Zadanie 1.16. Zbadać punkty skupienia ciągu $a_n = n!e - [n!e]$, gdzie $[\cdot]$ oznacza część całkowitą.

Zadanie 1.17. Oblicz granicę

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x/(x+1)} - 1}{\sin x}.$$

Zadanie 1.18. Podaj przykład takiej funkcji $f\colon [0, \infty)$, że

- f jest jednostajnie ciągła na $[0, \infty)$.
- $\limsup_{x \to \infty} f(x) = +\infty$.

- $\liminf_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.
- $\limsup_{x\to\infty} |f'(x)| = \infty$.

Zadanie 1.19. Niech P_n będzie ciągiem wielomianów rzeczywistych. Przypuśćmy, że P_n jest zbieżny jednostajnie na całym $\mathbb{R}$. Wykaż, że istnieją takie N i k, że dla każdego $n > N$ zachodzi $\deg P_n = k$.

Zadanie 1.20. Oblicz granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}.$$

Zadanie 1.21. Oblicz granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2}.$$

Zadanie 1.22. Oblicz

$$\lim_{x\to\infty} \left[(x+1)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+1}} \right].$$

Zadanie 1.23. Oblicz

$$\lim_{x\to\infty} x^{3/2}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}).$$

Zadanie 1.24. Znajdź ekstrema funkcji $e^{-x^2}\cos(x^2)$ dla $x \in (-\infty, \infty)$.

Zadanie 1.25. Wykaż, że dla $|x| \leq 2$ zachodzi $|3x - x^3| \leq 2$.

Zadanie 1.26. Zbadać zbieżność jednostajną ciągu funkcji $f_n(x) = n\ln(1 + \frac{x^2}{n^2})$ dla $x \in \mathbb{R}$ oraz $g_n = n^{-1}\ln(1 + \frac{x^2}{n^2})$.

Zadanie 1.27. Zbadać zbieżność jednostajną ciągu funkcji $f_n(x) = n\,(\sqrt[n]{x} - 1)$ dla $x \in [1, a]$, gdzie $a > 1$ – parametr.

Zadanie 1.28. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągła. Oznaczamy $f_n(x) = f(x + \frac{1}{2^n})$. Wykazać, że jeśli f jest jednostajnie ciągła, to f_n zbiega jednostajnie do f. Czy zachodzi implikacja odwrotna?

Zadanie 1.29. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie taka, że f' jest jednostajnie ciągła. Wykazać, że ciąg funkcji $n\,(f(x + 1/n) - f(x))$ zbiega jednostajnie do $f'(x)$. Podać przykład, że założenie o jednostajnej ciągłości jest istotne.

Zadanie 1.30. Zbadaj, na jakich zbiorach szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2^{n-1}}}{1 - x^{2^n}}$$

jest zbieżny, a na jakich zbieżny jednostajnie.

Zadanie 1.31. Rozwiń w szereg Taylora funkcję $\frac{e^x}{1-x}$ w punkcie 0 i znajdź jego promień zbieżności.

Zadanie 1.32. Niech $f(x) = \sum x^{2^n}$. Wykaż, że istnieje takie M, że dla wszyskich $x \in (-1, 1)$ zachodzi $|f(x)| \leq M(1 - |x|)$.

Zadanie 1.33. Wykaż, że dla $x \in (-1, 1)$ zachodzi

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}.$$

Zadanie 1.34. Znajdź promień zbieżności szeregu potęgowego dla $\arcsin x$.

Zadanie 1.35. Oblicz całki:

$$\begin{array}{rrr}
\int e^{2x}\cos x dx & \int x^3 \operatorname{tg} x dx & \int \frac{\sinh\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \\
\int \frac{1}{3+\sin x} dx & \int \frac{5x}{(x-1)^2(x+2)} dx & \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx \\
\int \ln\ln x dx & \int \frac{\sin x}{3+\cos^2 x} dx & \int \frac{3x+1}{\sqrt[3]{x^3+x+1}} dx \\
\int \frac{1}{1-x^2} \ln\frac{1+x}{1-x} dx & \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}} dx & \int x\sqrt{2x-5} dx \\
\int \frac{1}{1+e^x} dx & \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx & \int \sqrt{x}(\ln x)^2 dx.
\end{array}$$

Zadanie 1.36. Wykaż, że θ funkcja zadana wzorem

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

jest nieskończenie razy różniczkowalna na zbiorze $x > 0$.

Zadanie 1.37. Wykaż, że ciąg $f_n(x) = \frac{1}{n}\arctan x^n$ jest jednostajnie zbieżny na $(-\infty, \infty)$, mimo to

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'_{x=1} \neq \lim_{n\to\infty} f_n'(1).$$

Zadanie 1.38. Dla jakich x wzór

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(x + \frac{1}{n}\right)^n$$

zadaje dobrze określoną funkcję? W jakich punktach jest ona ciągła?

Zadanie 1.39. Wykaż, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x}\right)$$

schodzi się niejednostajnie na $[0, 1]$, ale jego suma jest ciągła.

Zadanie 1.40. Przypuśćmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Wykaż, że szereg Dirichleta

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$$

schodzi się jednostajnie po $x \geq 0$.

2. Zadania za 1 punkt

Jeden punkt jest do rozdzielenia pomiędzy wszystkie osoby, które przed 15 maja oddadzą dane zadanie. Punkty mają kluczowe znaczenie w "wyścigu po rekomendację": 3–4 najlepsze osoby taką rekomendację uzyskają.

Zadanie 2.1. Niech $a_0 = 1$ oraz $a_n = \sin a_{n-1}$. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}a_n = \sqrt{3}$.

Zadanie 2.2. Liczby całkowite dodatnie, które w rozwinięciu dziesiętnym nie zawierają cyfry 9 ustawiamy w ciąg rosnący: $1, 2, \ldots, 8, 10, 11, \ldots, 88, \ldots, 100, \ldots$. Oznaczmy przez a_n n-ty wyraz ciągu. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum \frac{1}{a_n}$.

Zadanie 2.3. Oblicz granicę poprawiony wzór!

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{j=0}^{n}\frac{n^j}{j!}.$$

Zadanie 2.4. Dla $\phi \in [0, 2\pi]$ obliczyć nieskończoną sumę

$$s = \cos^3\phi - \frac{1}{3}\cos^3 3\phi + \frac{1}{3^2}\cos^3 3^2\phi - \ldots.$$

Zadanie 2.5. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie niestałą funkcją ciągłą i okresową o okresie 2π. Przypuśćmy, że istnieje takie n, że

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} f(x)\cos x = \int_0^{2\pi} f(x)\sin x = \int_0^{2\pi} f(x)\cos 2x = \cdots =$$
$$= \int_0^{2\pi} f(x)\cos nx = \int_0^{2\pi} f(x)\sin nx = 0.$$

Wykaż, że na dowolnym przedziale postaci $[a, a+2\pi]$, funkcja f zmienia znak co najmniej $2n+2$ razy.

Zadanie 2.6. Niech ξ oznacza jedyną liczbę rzeczywistą taką, że $\xi e^{1+\xi} = 1$. Dla $n > 1$, niech x_n oznacza jedyny rzeczywisty pierwiastek równania

$$1 + x_n + \frac{x_n^2}{2!} + \cdots + \frac{x_n^n}{n!} = 0.$$

Wykaż, że

$$x_n = \xi n + \frac{1}{2}\frac{\xi}{1+\xi}\ln n + \frac{\xi}{1+\xi}\ln\left(\sqrt{2\pi}\frac{1+\xi}{\xi}\right) + o(1).$$

Zadanie 2.7. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} - \ln 2\right).$$

Zadanie 2.8. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie klasy C^∞. O f powiemy, że jest analityczna w punkcie x_0, jeśli istnieje take $\varepsilon > 0$, że dla każdego $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ zachodzi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Niech U oznacza zbiór punktów, dla których f jest analityczna. Udowodnij, że U jest otwarty. Wykorzystaj to do skonstruowania funkcji f, która jest klasy C^∞ ale nie jest analityczna w żadnym punkcie.

Zadanie 2.9. Niech n i s będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Niech

$$N = \#\left\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3\colon\ -n \le x,y,z \le n \text{ oraz } -s \le x+y+z \le s\right\}.$$

Wykaż, że

$$N = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^3 \frac{\sin\frac{2s+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt.$$

Zadanie 2.10. Niech f będzie klasy C^2 taka, że $\lim_{x\to\infty} f(x) + f'(x) + f''(x) = 0$. Wykaż, że $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Czy teza pozostaje prawdziwa, jeśli $f + f' + f''$ zastąpimy przez $f + f' + f'' + f^{(3)}$?

Zadanie 2.11. Dla ustalonego n, niech $a_{n1}, \ldots, a_{nk_n}$ oznacza wszystkie ułamki nieskracalne postaci $\frac{p}{q}$, gdzie $0 \le p \le q \le n$, uszeregowane od najmniejszego do największego, na przykład dla $n = 4$ mamy ciąg $\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}$. Niech $d_{nm} = |a_{n,m} - \frac{m}{k_n}|$. Wykaż, że dla dowolnego $r > \frac{1}{2}$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} n^{-r}\sum_{m=0}^{k_n} d_{nm} = 0.$$

Zadanie 2.12. Zbadać zbieżność oraz zbieżność jednostajną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx - \lfloor nx \rfloor - \frac{1}{2}}{n}$$

dla $x \in [0,1]$.