Zadanie 1. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

porównując go z całką z funkcji $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że funkcja $x \ln^2 x$ ma pochodną równą $\ln x(\ln x + 2)$ jest więc rosnąca dla $x > e$. Dlatego funkcja $f(x)$ jest malejąca dla $x > e$, w szczególności dla $x \geq 3$.

Niech teraz dla $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą większą lub równą od x. Z monotoniczności funkcji f wnioskujemy, że dla $x \geq 3$ zachodzi $f(\lceil x \rceil) \leq f(x)$. A co za tym idzie, dla każdego $n \geq 4$, naturalnego, zachodzi

$$\int_{n-1}^{n} f(x)dx \geq \int_{n-1}^{n} f(\lceil x \rceil)dx.$$

Jeśli jednak $x \in (n-1, n]$, to $\lceil x \rceil = n$ a zatem ostatnia całka jest równa

$$\int_{n-1}^{n} f(n)dx = f(n) \int_{n-1}^{n} 1dx = f(n) = \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

Czyli, dla $n \geq 4$ mamy

$$\int_{n-1}^{n} f(x)dx \geq \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

Sumując tę nierówność po $n = 4, \ldots, N$ dla ustalonego, dużego N uzyskujemy

$$\sum_{n=4}^{N} \frac{1}{n \ln^2 n} \leq \int_{3}^{N-1} f(x)dx = \frac{-1}{\ln x}\Big|_{3}^{N-1} = \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln(N-1)} \leq \frac{1}{\ln 3}.$$

Oznacza to, że sumy częściowe szeregu są ograniczone od góry, szereg jest rosnący, stąd jest zbieżny. $\square$

Zadanie 2. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{1 \cdot \ldots \cdot n}.$$

Rozwiązanie. Logarytmując wyrażenie pod granicą uzyskujemy.

$$\frac{1}{n}(\ln 1 + \cdots + \ln n) - \ln n = \frac{1}{n}(\ln 1 + \ldots + \ln n) - \frac{1}{n}(\ln n + \ldots + \ln n).$$

To ostatnie wyrażenie jest równe

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln \frac{k}{n}.$$

Obserwujemy, że to jest nic innego jak suma Riemanna dla funkcji $\ln x$ na przedziale $[0, 1]$. Z całkowalności logarytmu

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln \frac{k}{n} = \int_{0}^{1} \ln x dx = -1.$$

A zatem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{1 \cdot \ldots \cdot n} = \frac{1}{e}.$$

Oznacza to na przykład, że dla dużych n zachodzi $n! \sim \frac{n^n}{e^n}$. Wzory tego typu nazywa się wzorami Stirlinga. To jest najprostszy z nich. $\square$

Zadanie 3. Niech $b > a > 0$. Obliczyć

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx.$$

Rozwiązanie. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ całka $\int_\varepsilon^\infty \frac{\cos x}{x} dx$ jest zbieżna na mocy kryterium całkowego Leibniza (dla $\varepsilon = 0$ nie, bo mamy osobliwość w 0). Możemy więc napisać

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^\infty \frac{\cos ax}{x} - \frac{\cos bx}{x} dx =$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_\varepsilon^\infty \frac{\cos ax}{x} dx - \int_\varepsilon^\infty \frac{\cos bx}{x} dx \right).$$

Podstawiając w $y = ax$ w pierwszej całce a $y = bx$ w drugiej, uzyskujemy

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{a\varepsilon}^\infty \frac{\cos y}{y} dy - \int_{b\varepsilon}^\infty \frac{\cos y}{y} dy \right).$$

Korzystając z addytywności całki dostajemy

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\cos y}{y} dy.$$

Zauważmy, że dla dowolnego $\delta > 0$, możemy znaleźć tak małe ε, żeby dla wszystkich $y \in [a\varepsilon, b\varepsilon]$ zachodziło $1 - \delta < \cos y < 1 + \delta$. Korzystamy tu z ciągłości cos. Tak więc, dla dostatecznie małych ε

$$(1 - \delta) \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{1}{y} dy < \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\cos y}{y} dy < (1 + \delta) \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{1}{y} dy,$$

przy czym oczywiście $\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{1}{y} dy = \ln b - \ln a$. Tak więc dla dostatecznie małych ε całka

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\cos y}{y} dy$$

zawiera się w przedziale $((1 - \delta) \ln \frac{b}{a}, (1 + \delta) \ln \frac{b}{a})$. Wobec dowolności δ, granica wynosi $\ln \frac{b}{a}$ i temu jest równa szukana całka. $\square$