Zestaw zadań z Analizy Matematycznej. II. *Prawie każde zadanie jest za 5 punktów. Termin oddania: 22 stycznia 2008*
Zadania można wręczać osobiście, przez kogoś, wkładać do skrytki lub przesyłać elektronicznie

Zadanie 1. Zbadaj ilość możliwych rozwiązań równania

$$f(x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

gdzie f i g są funkcjami wypukłymi.

Zadanie 2. Wykaż, że spośród wszystkich 100–kątów opisanych na okręgu o promieniu 1 najmniejszy obwód ma stukąt foremny.

Zadanie 3 (10pkt)**.** Niech f ciągła na $\mathbb{R}$. Z których z poniższych założeń wynika, że istnieje $\lim_{x\to\infty} f(x)$ (udowodnij, lub podaj kontrprzykład)?

(a) f ograniczona.
(b) f różniczkowalna i f i f' ograniczone.
(c) f klasy C^2 oraz f i f'' ograniczone.
(d) f różniczkowalna, f' dąży do zera.
(e) f różniczkowalna, $xf'(x)$ dąży do zera.
(f) f klasy C^2, f' dąży do zera i f'' ograniczone.

Zadanie 4. Scharakteryzuj wszystkie funkcje wypukłe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że

$$\frac{f(x)}{x}$$

pozostaje ograniczona przy $x \to \pm\infty$.

Zadanie 5. Niech $f_n : [0,1] \to [0,1]$ będą funkcjami określonymi następująco:

dzielimy przedział $[0,1]$ na 2^n równych odcinków. Na odcinku $[\frac{a}{2^n}, \frac{a+1}{2^n}]$ f_n jest liniowa oraz $f_n(a/2^n)$ jest równe 0, gdy a parzysta, zaś 1, gdy a jest nieparzysta (wykres f_n to „piła” o 2^{n-1} zębach).

Zbadaj ciągłość i różniczkowalność funkcji

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f_n(x).$$