Zestaw zadań z Analizy Matematycznej. II. *Każde zadanie jest za 5 punktów.*
Termin oddania: 12 grudnia 2008
Zadania można wręczać osobiście, przez kogoś, wkładać do skrytki lub przesyłać elektronicznie

Zadanie 1. Niech $\alpha, \beta > 0$ Niech a_n będzie ciągiem zadanym rekurencyjnie: $a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+2} = \alpha a_n + \beta a_{n+1}$. Udowodnij, że szereg

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{a_j}$$

jest zbieżny.

Zadanie 2. Rozważamy znowu ciąg rekurencyjny $b_1 = 1$,

$$b_n = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{5}{b_n}\right).$$

Udowodnij, że dla każdego $\alpha > 0$ szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n - \sqrt{5}\right)^{\alpha}$$

jest zbieżny.

Zadanie 3. Wykaż, że dla $x \in \mathbb{R}$ szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

jest zbieżny i zbadaj ciągłość funkcji, która wartości x przypisuje powyższą sumę.

Zadanie 4. Niech $\phi(x)$ będzie funkcją ciągłą na zbiorze $(0, \infty)$, przy czym dla dostatecznie dużych x zachodzi wzór

$$\phi(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \dots,$$

gdzie a_i są ustalone a wyrażenie po prawej stronie jest szeregiem zbieżnym dla $x \gg 0$.

Udowodnij, że szereg

$$\phi(1) + \phi(2) + \phi(3) + \cdots + \phi(n) + \dots$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $a_0 = a_1 = 0$.