

Afiniczne krzywe algebraiczne

Obrona pracy doktorskiej

Maciej Borodzik

Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski

Zagadnienie

Badanie krzywych algebraicznych na płaszczyźnie zespolonej \mathbb{C}^2 .

Zagadnienie

Badanie krzywych algebraicznych na płaszczyźnie zespolonej \mathbb{C}^2 .

Krzywą algebraiczną w \mathbb{C}^2 nazwiemy zbiór zer pewnego wielomianu $F(x, y)$. **Stopniem** krzywej nazwiemy stopień wielomianu F .

Zagadnienie

Badanie krzywych algebraicznych na płaszczyźnie zespolonej \mathbb{C}^2 .

Krzywą algebraiczną w \mathbb{C}^2 nazwiemy zbiór zer pewnego wielomianu $F(x, y)$. **Stopniem** krzywej nazwiemy stopień wielomianu F .

Warunki topologiczne:

Zagadnienie

Badanie krzywych algebraicznych na płaszczyźnie zespolonej \mathbb{C}^2 .

Krzywą algebraiczną w \mathbb{C}^2 nazwiemy zbiór zer pewnego wielomianu $F(x, y)$. **Stopniem** krzywej nazwiemy stopień wielomianu F .

Warunki topologiczne:

- genus krzywej,

Zagadnienie

Badanie krzywych algebraicznych na płaszczyźnie zespolonej \mathbb{C}^2 .

Krzywą algebraiczną w \mathbb{C}^2 nazwiemy zbiór zer pewnego wielomianu $F(x, y)$. **Stopniem** krzywej nazwiemy stopień wielomianu F .

Warunki topologiczne:

- genus krzywej,
- ilość miejsc w nieskończoności,

Zagadnienie

Badanie krzywych algebraicznych na płaszczyźnie zespolonej \mathbb{C}^2 .

Krzywą algebraiczną w \mathbb{C}^2 nazwiemy zbiór zer pewnego wielomianu $F(x, y)$. **Stopniem** krzywej nazwiemy stopień wielomianu F .

Warunki topologiczne:

- genus krzywej,
- ilość miejsc w nieskończoności,
- ilość samoprzecięć.

Zagadnienie

Badanie krzywych algebraicznych na płaszczyźnie zespolonej \mathbb{C}^2 .

Krzywą algebraiczną w \mathbb{C}^2 nazwiemy zbiór zer pewnego wielomianu $F(x, y)$. **Stopniem** krzywej nazwiemy stopień wielomianu F .

Warunki topologiczne:

- genus krzywej,
- ilość miejsc w nieskończoności,
- ilość samoprzebieć.
- ilość i typ punktów osobliwych.

Znane wyniki

Znane wyniki

Twierdzenie Abyahkhara–Moha–Suzuki’ego

Każda gładka krzywa wymierna z jednym punktem w nieskończoności jest izomorficzna z prostą.

Znane wyniki

Twierdzenie Abyahkhara–Moha–Suzuki’ego

Każda gładka krzywa wymierna z jednym punktem w nieskończoności jest izomorficzna z prostą.

Twierdzenie Zajdenberga–Lina

Każda krzywa wymierna z jednym punktem w nieskończoności jest izomorficzna z krzywą postaci

$$x(t) = t^p, y(t) = t^q.$$

Znane wyniki

Twierdzenie Abyahkhara–Moha–Suzuki’ego

Każda gładka krzywa wymierna z jednym punktem w nieskończoności jest izomorficzna z prostą.

Twierdzenie Zajdenberga–Lina

Każda krzywa wymierna z jednym punktem w nieskończoności jest izomorficzna z krzywą postaci

$$x(t) = t^p, y(t) = t^q.$$

p i q są, oczywiście, względnie pierwsze.

Znane wyniki cd.

- M. Koras i B. Russel. Gładkie krzywe wymierne z dwoma miejscami w nieskończoności.

Znane wyniki cd.

- M. Koras i B. Russel. Gładkie krzywe wymierne z dwoma miejscami w nieskończoności.
- Flenner, Orevkov, Zajdenberg et al. Krzywe ostrzowe: wymierne, bez samoprzebieg w $\mathbb{C}P^2$.

Znane wyniki cd.

- M. Koras i B. Russel. Gładkie krzywe wymierne z dwoma miejscami w nieskończoności.
- Flenner, Orevkov, Zajdenberg et al. Krzywe ostrzowe: wymierne, bez samoprzecięć w $\mathbb{C}P^2$.
- m.in. Greuel, Lossen, Shustin. Badanie krzywych dowolnego genusu z ustalonymi osobliwościami.

Znane wyniki cd.

- M. Koras i B. Russel. Gładkie krzywe wymierne z dwoma miejscami w nieskończoności.
- Flenner, Orevkov, Zajdenberg et al. Krzywe ostrzowe: wymierne, bez samoprzecięć w $\mathbb{C}P^2$.
- m.in. Greuel, Lossen, Shustin. Badanie krzywych dowolnego genusu z ustalonymi osobliwościami.
- inni: Kaliman, Cassou–Nouguès...

Obiekt zainteresowań

Krzywe algebraiczne,

Obiekt zainteresowań

Krzywe algebraiczne, wymierne (takie, które daje się przedstawić jako $(x(t), y(t))$, gdzie x i y są funkcjami wymiernymi od t).

Obiekt zainteresowań

Krzywe algebraiczne, wymierne (takie, które daje się przedstawić jako $(x(t), y(t))$, gdzie x i y są funkcjami wymiernymi od t).

Jedno lub dwa miejsca w nieskończoności

Obiekt zainteresowań

Krzywe algebraiczne, wymierne (takie, które daje się przedstawić jako $(x(t), y(t))$, gdzie x i y są funkcjami wymiernymi od t).

Jedno lub dwa miejsca w nieskończoności

oraz zero lub jedno samoprzecięcie

Obiekt zainteresowań

Krzywe algebraiczne, wymierne (takie, które daje się przedstawić jako $(x(t), y(t))$, gdzie x i y są funkcjami wymiernymi od t).

Jedno lub dwa miejsca w nieskończoności

oraz zero lub jedno samoprzecięcie

Obiekt zainteresowań

Krzywe algebraiczne, wymierne (takie, które daje się przedstawić jako $(x(t), y(t))$, gdzie x i y są funkcjami wymiernymi od t).

Jedno lub dwa miejsca w nieskończoności

oraz zero lub jedno samoprzecięcie

Obiekt zainteresowań

Krzywe algebraiczne, wymierne (takie, które daje się przedstawić jako $(x(t), y(t))$, gdzie x i y są funkcjami wymiernymi od t).

Jedno lub dwa miejsca w nieskończoności

oraz zero lub jedno samoprzecięcie

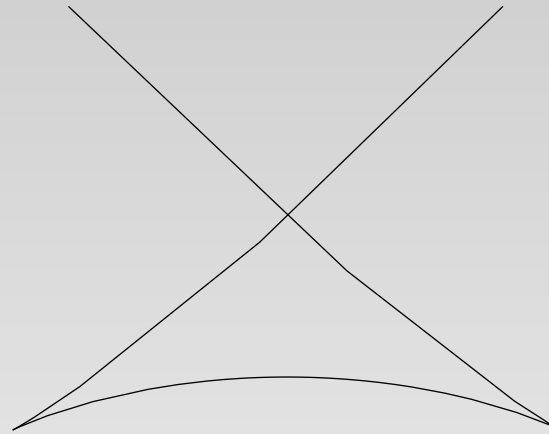
Prosty rachunek pokazuje, że krzywe takie (jako krzywe w \mathbb{C}^2) mają charakterystykę Eulera równą zero.

Przykłady

A więc interesują mnie takie krzywe,

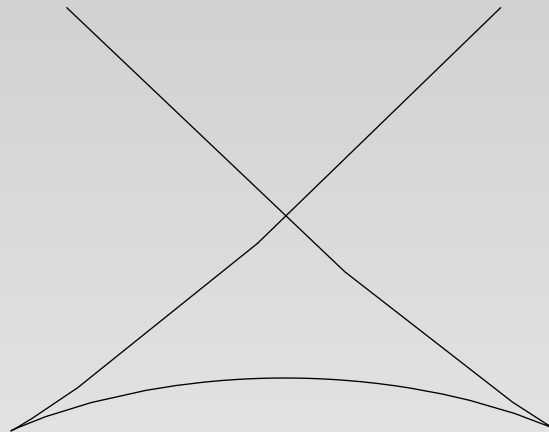
Przykłady

A więc interesują mnie takie krzywe,

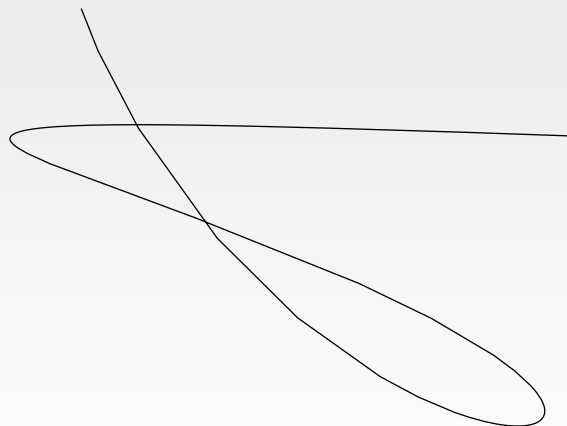


Przykłady

A więc interesują mnie takie krzywe,



ale takie już nie:



Patrzenie na krzywą wymierną

- Pierwszy sposób: równanie

Patrzenie na krzywą wymierną

- **Pierwszy sposób:** równanie
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : f(x, y) = 0\}$

Patrzanie na krzywą wymierną

- **Pierwszy sposób:** równanie
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : f(x, y) = 0\}$
- Nie kontrolujemy genusu.

Patrzenie na krzywą wymierną

- **Pierwszy sposób:** równanie
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : f(x, y) = 0\}$
- Nie kontrolujemy genusu.
- Punkty osobliwe: $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$

Patrzenie na krzywą wymierną

- **Pierwszy sposób:** równanie
 - $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : f(x, y) = 0\}$
 - Nie kontrolujemy genusu.
 - Punkty osobliwe: $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$
 - Widzimy samoprzecięcia jako punkty osobliwe.
-

Patrzenie na krzywą wymierną

- **Pierwszy sposób:** równanie
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : f(x, y) = 0\}$
- Nie kontrolujemy genusu.
- Punkty osobliwe: $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$
- Widzimy samoprzecięcia jako punkty osobliwe.

-
- **Drugi sposób:** parametryzacja

Patrzenie na krzywą wymierną

- **Pierwszy sposób:** równanie
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : f(x, y) = 0\}$
- Nie kontrolujemy genusu.
- Punkty osobliwe: $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$
- Widzimy samoprzecięcia jako punkty osobliwe.

-
- **Drugi sposób:** parametryzacja

- $C = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{C}^2, t \in \mathbb{C}P^1\}$

Patrzenie na krzywą wymierną

- **Pierwszy sposób:** równanie
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : f(x, y) = 0\}$
- Nie kontrolujemy genusu.
- Punkty osobliwe: $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$
- Widzimy samoprzecięcia jako punkty osobliwe.

-
- **Drugi sposób:** parametryzacja
 - $C = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{C}^2, t \in \mathbb{C}P^1\}$
 - Kontrolujemy genus.

Patrzenie na krzywą wymierną

- **Pierwszy sposób:** równanie
 - $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : f(x, y) = 0\}$
 - Nie kontrolujemy genusu.
 - Punkty osobliwe: $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$
 - Widzimy samoprzecięcia jako punkty osobliwe.
-

- **Drugi sposób:** parametryzacja
- $C = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{C}^2, t \in \mathbb{C}P^1\}$
- Kontrolujemy genus.

Patrzenie na krzywą wymierną

- **Pierwszy sposób:** równanie
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : f(x, y) = 0\}$
- Nie kontrolujemy genusu.
- Punkty osobliwe: $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$
- Widzimy samoprzecięcia jako punkty osobliwe.

-
- **Drugi sposób:** parametryzacja
 - $C = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{C}^2, t \in \mathbb{C}P^1\}$
 - Kontrolujemy genus.
 - Punkty osobliwe: $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$

Krzywe parametryczne

Krzywe wymierne z **jednym** punktem w nieskończoności dadzą się sparametryzować wielomianami. Możemy zapisać je jako

Krzywe parametryczne

Krzywe wymierne z **jednym** punktem w nieskończoności dadzą się sparametryzować wielomianami. Możemy zapisać je jako

$$\begin{cases} x(t) &= t^a + \alpha_1 t^{a-1} + \dots + \alpha_a \\ y(t) &= t^c + \beta_1 t^{c-1} + \dots + \beta_c. \end{cases}$$

Krzywe parametryczne

Krzywe wymierne z **jednym** punktem w nieskończoności dadzą się sparametryzować wielomianami. Możemy zapisać je jako

$$\begin{cases} x(t) &= t^a + \alpha_1 t^{a-1} + \dots + \alpha_a \\ y(t) &= t^c + \beta_1 t^{c-1} + \dots + \beta_c. \end{cases}$$

Krzywe z **dwoma** punktami w nieskończoności można zapisać jako wielomiany od t i t^{-1} ,

Krzywe parametryczne

Krzywe wymierne z **jednym** punktem w nieskończoności dadzą się sparametryzować wielomianami. Możemy zapisać je jako

$$\begin{cases} x(t) &= t^a + \alpha_1 t^{a-1} + \dots + \alpha_a \\ y(t) &= t^c + \beta_1 t^{c-1} + \dots + \beta_c. \end{cases}$$

Krzywe z **dwoma** punktami w nieskończoności można zapisać jako wielomiany od t i t^{-1} , a więc

$$\begin{cases} x(t) &= t^a + \alpha_1 t^{a-1} + \dots + \alpha_{a+b} t^{-b} \\ y(t) &= t^c + \beta_1 t^{c-1} + \dots + \beta_{c+d} t^{-d}. \end{cases}$$

Liczba Milnora

Gdy w punkcie osobliwym x_0 , krzywa C zadaje się lokalnie jako $\{f \equiv 0\}$, określamy liczbę Milnora jako

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} \dim \mathcal{O}_x / (f'_x, f'_y).$$

Liczba Milnora

Gdy w punkcie osobliwym x_0 , krzywa C zadaje się lokalnie jako $\{f \equiv 0\}$, określamy liczbę Milnora jako

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} \dim \mathcal{O}_x / (f'_x, f'_y).$$

Własności:

Liczba Milnora

Gdy w punkcie osobliwym x_0 , krzywa C zadaje się lokalnie jako $\{f \equiv 0\}$, określamy liczbę Milnora jako

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} \dim \mathcal{O}_x / (f'_x, f'_y).$$

Własności:

- Wpływa na genus,

Liczba Milnora

Gdy w punkcie osobliwym x_0 , krzywa C zadaje się lokalnie jako $\{f \equiv 0\}$, określamy liczbę Milnora jako

$$\mu \stackrel{def}{=} \dim \mathcal{O}_x / (f'_x, f'_y).$$

Własności:

- Wpływa na genus,
- Wymiar przestrzeni deformacji wersalnych kielka osobliwości,

Liczba Milnora

Gdy w punkcie osobliwym x_0 , krzywa C zadaje się lokalnie jako $\{f \equiv 0\}$, określamy liczbę Milnora jako

$$\mu \stackrel{def}{=} \dim \mathcal{O}_x / (f'_x, f'_y).$$

Własności:

- Wpływa na genus,
- Wymiar przestrzeni deformacji wersalnych kielka osobliwości,
- Dobra do badania własności krzywych zadanych przez równanie.

Ilość punktów podwójnych

Dla punktu osobliwego z liczbą Milnora μ i r gałęziami określamy wielkość

Ilość punktów podwójnych

Dla punktu osobliwego z liczbą Milnora μ i r gałęziami określamy wielkość

$$2\delta = \mu + r - 1.$$

Ilość punktów podwójnych

Dla punktu osobliwego z liczbą Milnora μ i r gałęziami określamy wielkość

$$2\delta = \mu + r - 1.$$

Jeśli (x_0, y_0) jest punktem osobliwym krzywej $(x(t), y(t))$, to

Ilość punktów podwójnych

Dla punktu osobliwego z liczbą Milnora μ i r gałęziami określamy wielkość

$$2\delta = \mu + r - 1.$$

Jeśli (x_0, y_0) jest punktem osobliwym krzywej $(x(t), y(t))$, to 2δ jest ilością rozwiązań równania

Ilość punktów podwójnych

Dla punktu osobliwego z liczbą Milnora μ i r gałęziami określamy wielkość

$$2\delta = \mu + r - 1.$$

Jeśli (x_0, y_0) jest punktem osobliwym krzywej $(x(t), y(t))$, to 2δ jest ilością rozwiązań równania

$$\begin{cases} \frac{x(s_1) - x(s_2)}{s_1 - s_2} = 0 \\ \frac{y(s_1) - y(s_2)}{s_1 - s_2} = 0 \end{cases}$$

takich, że $x(s_1) = x_0$ i $y(s_1) = y_0$.

Ilość punktów podwójnych

Dla punktu osobliwego z liczbą Milnora μ i r gałęziami określamy wielkość

$$2\delta = \mu + r - 1.$$

Jeśli (x_0, y_0) jest punktem osobliwym krzywej $(x(t), y(t))$, to 2δ jest ilością rozwiązań równania

$$\begin{cases} \frac{x(s_1) - x(s_2)}{s_1 - s_2} = 0 \\ \frac{y(s_1) - y(s_2)}{s_1 - s_2} = 0 \end{cases}$$

takich, że $x(s_1) = x_0$ i $y(s_1) = y_0$.

Jeśli (x_0, y_0) jest prostym punktem podwójnym, to $2\delta = 2$.



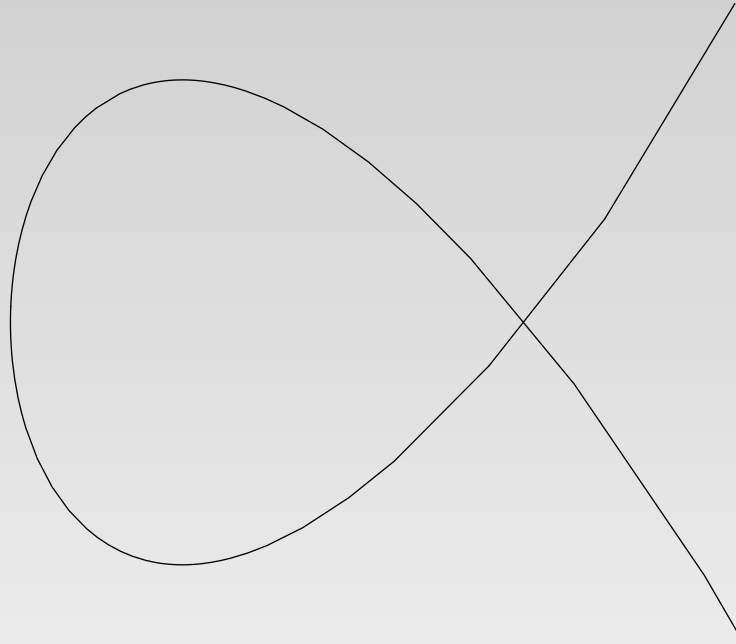
Przykład

Przykład

$$y^2 = x^3 + \lambda x^2,$$

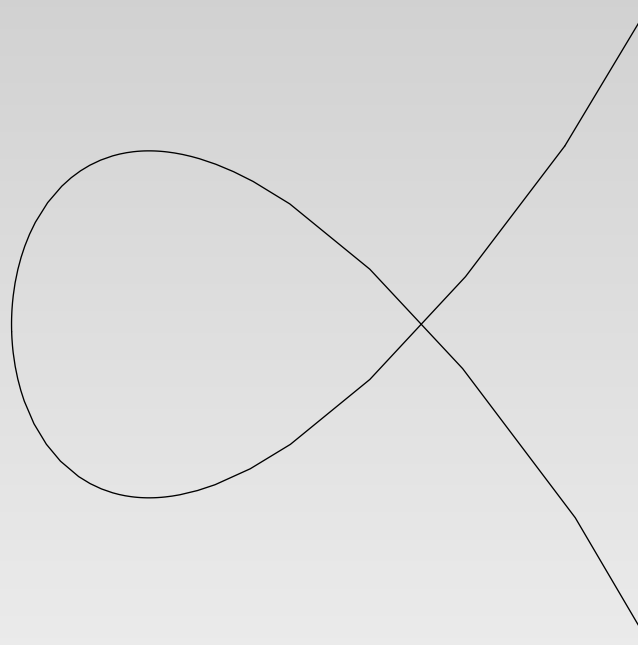
Przykład

$$y^2 = x^3 + \lambda x^2, \quad \lambda = 2.$$



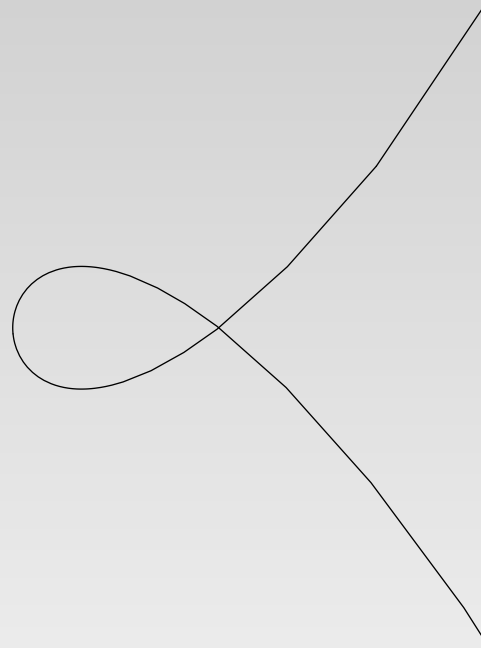
Przykład

$$y^2 = x^3 + \lambda x^2, \quad \lambda = 1.$$



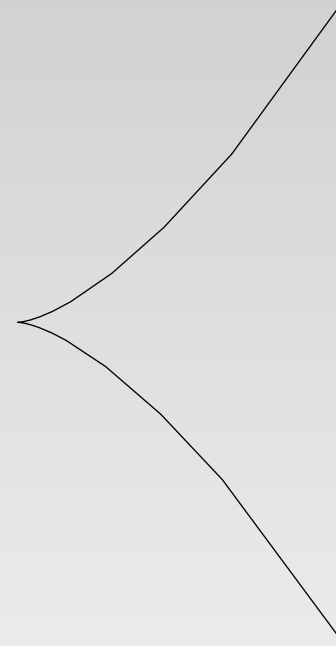
Przykład

$$y^2 = x^3 + \lambda x^2, \quad \lambda = \frac{1}{2}.$$



Przykład

$$y^2 = x^3 + \lambda x^2, \quad \lambda = 0.$$



Jeden punkt podwójny chowa się w punkcie osobliwym. $2\delta = 2$.

Inny przykład

Krzywa zależna od parametru λ .

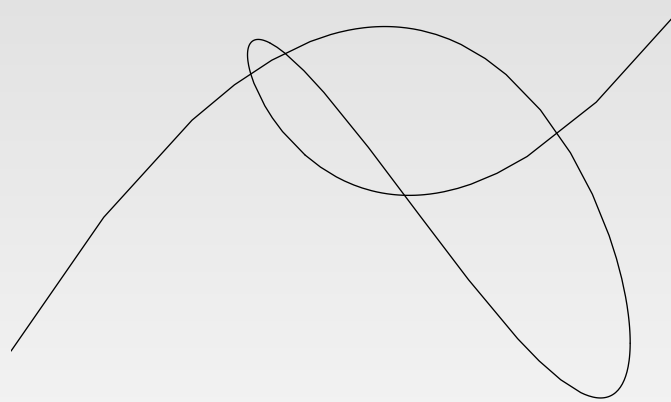
$$\begin{cases} x_\lambda(t) &= t^3 - 15\lambda^2 t \\ y_\lambda(t) &= t^5 - 30\lambda^2 t^3 + 10\lambda^3 t^2 + 201\lambda^4 t, \end{cases}$$

Inny przykład

Krzywa zależna od parametru λ .

$$\begin{cases} x_\lambda(t) &= t^3 - 15\lambda^2 t \\ y_\lambda(t) &= t^5 - 30\lambda^2 t^3 + 10\lambda^3 t^2 + 201\lambda^4 t, \end{cases}$$

$$\lambda = 1$$

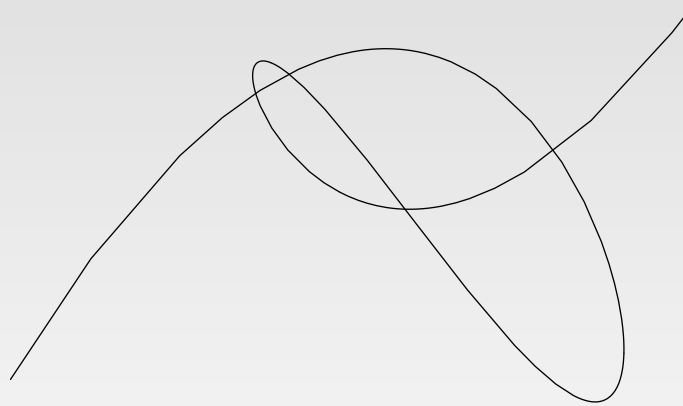


Inny przykład

Krzywa zależna od parametru λ .

$$\begin{cases} x_\lambda(t) &= t^3 - 15\lambda^2 t \\ y_\lambda(t) &= t^5 - 30\lambda^2 t^3 + 10\lambda^3 t^2 + 201\lambda^4 t, \end{cases}$$

$$\lambda = 0.99$$

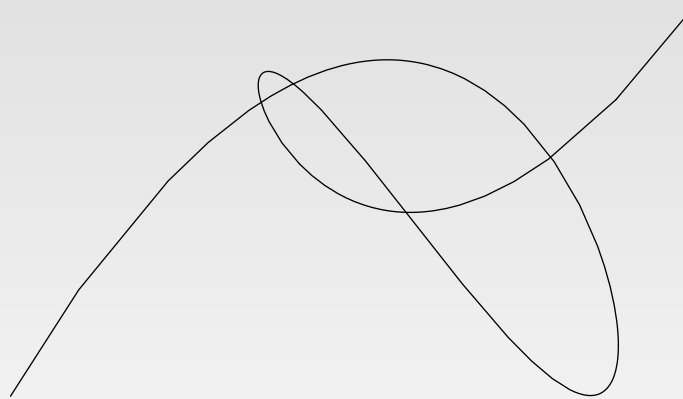


Inny przykład

Krzywa zależna od parametru λ .

$$\begin{cases} x_\lambda(t) &= t^3 - 15\lambda^2 t \\ y_\lambda(t) &= t^5 - 30\lambda^2 t^3 + 10\lambda^3 t^2 + 201\lambda^4 t, \end{cases}$$

$$\lambda = 0.98$$

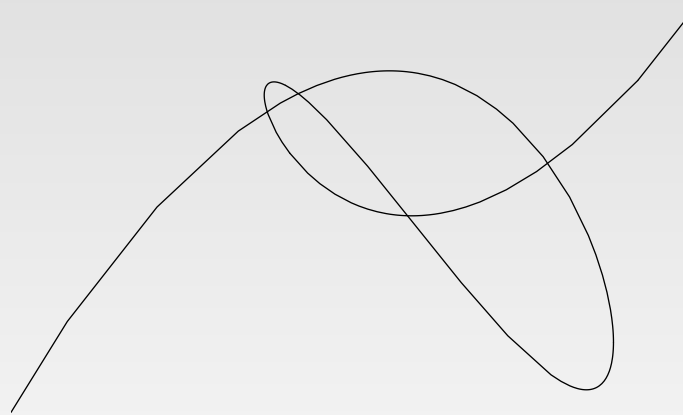


Inny przykład

Krzywa zależna od parametru λ .

$$\begin{cases} x_\lambda(t) &= t^3 - 15\lambda^2 t \\ y_\lambda(t) &= t^5 - 30\lambda^2 t^3 + 10\lambda^3 t^2 + 201\lambda^4 t, \end{cases}$$

$$\lambda = 0.97$$

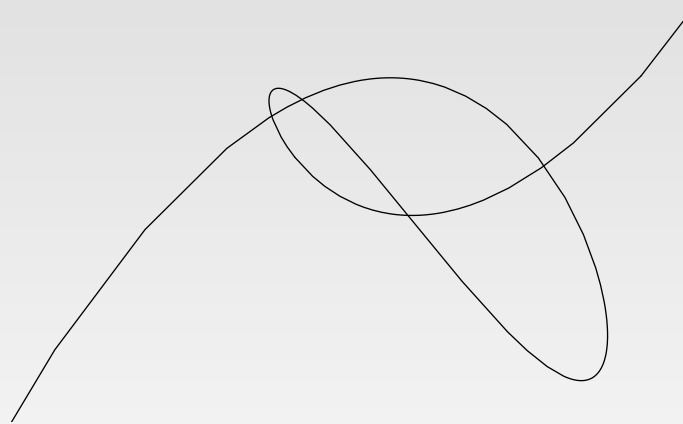


Inny przykład

Krzywa zależna od parametru λ .

$$\begin{cases} x_\lambda(t) &= t^3 - 15\lambda^2 t \\ y_\lambda(t) &= t^5 - 30\lambda^2 t^3 + 10\lambda^3 t^2 + 201\lambda^4 t, \end{cases}$$

$$\lambda = 0.96$$

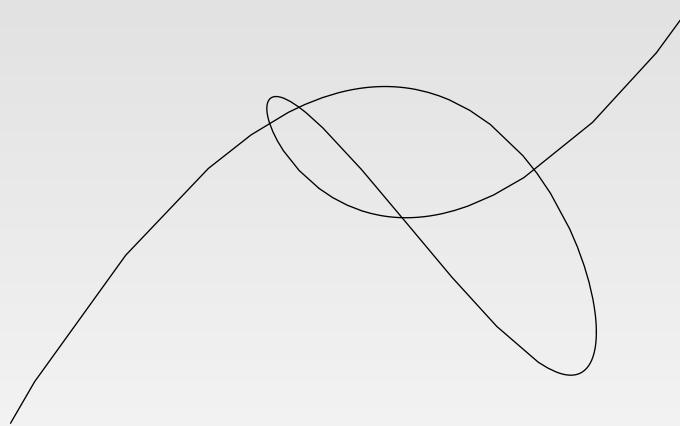


Inny przykład

Krzywa zależna od parametru λ .

$$\begin{cases} x_\lambda(t) &= t^3 - 15\lambda^2 t \\ y_\lambda(t) &= t^5 - 30\lambda^2 t^3 + 10\lambda^3 t^2 + 201\lambda^4 t, \end{cases}$$

$$\lambda = 0.95$$

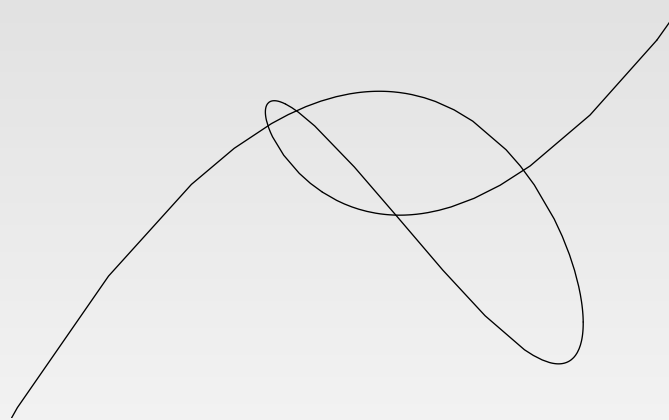


Inny przykład

Krzywa zależna od parametru λ .

$$\begin{cases} x_\lambda(t) &= t^3 - 15\lambda^2 t \\ y_\lambda(t) &= t^5 - 30\lambda^2 t^3 + 10\lambda^3 t^2 + 201\lambda^4 t, \end{cases}$$

$$\lambda = 0.94$$

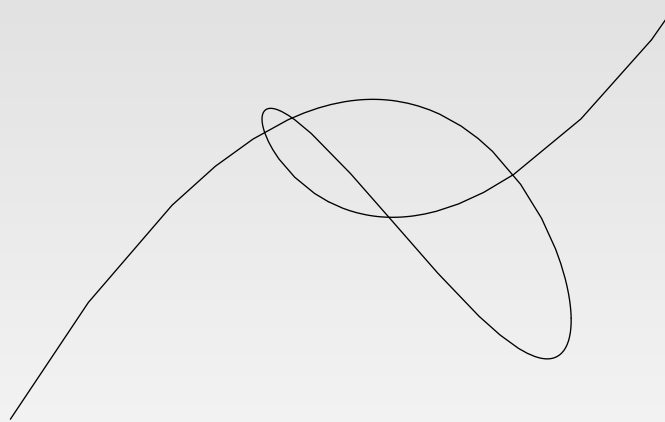


Inny przykład

Krzywa zależna od parametru λ .

$$\begin{cases} x_\lambda(t) &= t^3 - 15\lambda^2 t \\ y_\lambda(t) &= t^5 - 30\lambda^2 t^3 + 10\lambda^3 t^2 + 201\lambda^4 t, \end{cases}$$

$$\lambda = 0.93$$

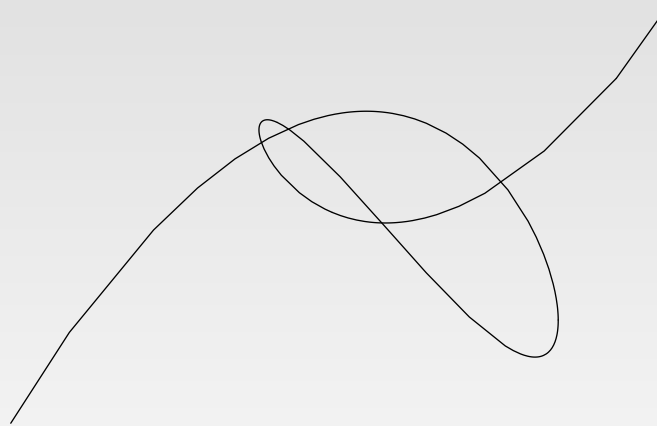


Inny przykład

Krzywa zależna od parametru λ .

$$\begin{cases} x_\lambda(t) &= t^3 - 15\lambda^2 t \\ y_\lambda(t) &= t^5 - 30\lambda^2 t^3 + 10\lambda^3 t^2 + 201\lambda^4 t, \end{cases}$$

$$\lambda = 0.92$$

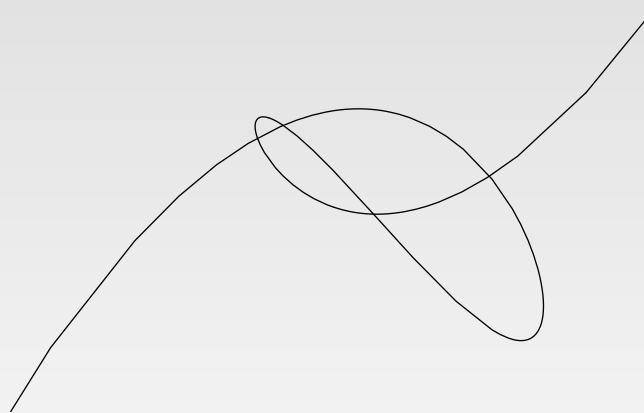


Inny przykład

Krzywa zależna od parametru λ .

$$\begin{cases} x_\lambda(t) &= t^3 - 15\lambda^2 t \\ y_\lambda(t) &= t^5 - 30\lambda^2 t^3 + 10\lambda^3 t^2 + 201\lambda^4 t, \end{cases}$$

$$\lambda = 0.91$$

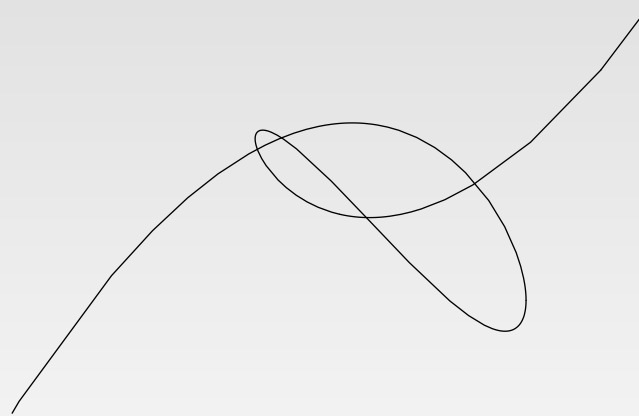


Inny przykład

Krzywa zależna od parametru λ .

$$\begin{cases} x_\lambda(t) &= t^3 - 15\lambda^2 t \\ y_\lambda(t) &= t^5 - 30\lambda^2 t^3 + 10\lambda^3 t^2 + 201\lambda^4 t, \end{cases}$$

$$\lambda = 0.89$$

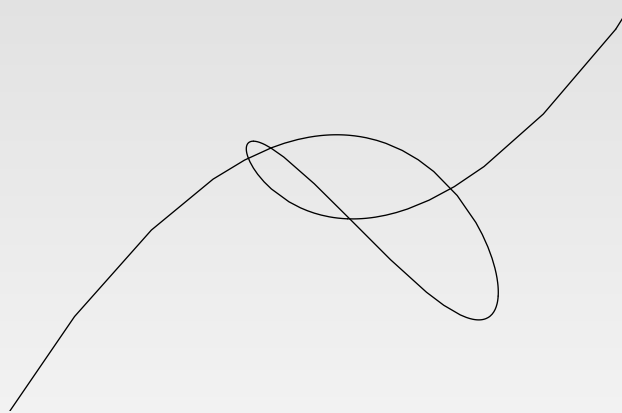


Inny przykład

Krzywa zależna od parametru λ .

$$\begin{cases} x_\lambda(t) &= t^3 - 15\lambda^2 t \\ y_\lambda(t) &= t^5 - 30\lambda^2 t^3 + 10\lambda^3 t^2 + 201\lambda^4 t, \end{cases}$$

$$\lambda = 0.87$$

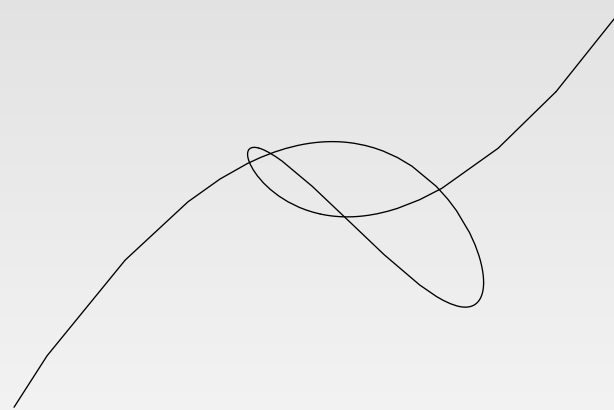


Inny przykład

Krzywa zależna od parametru λ .

$$\begin{cases} x_\lambda(t) &= t^3 - 15\lambda^2 t \\ y_\lambda(t) &= t^5 - 30\lambda^2 t^3 + 10\lambda^3 t^2 + 201\lambda^4 t, \end{cases}$$

$$\lambda = 0.85$$

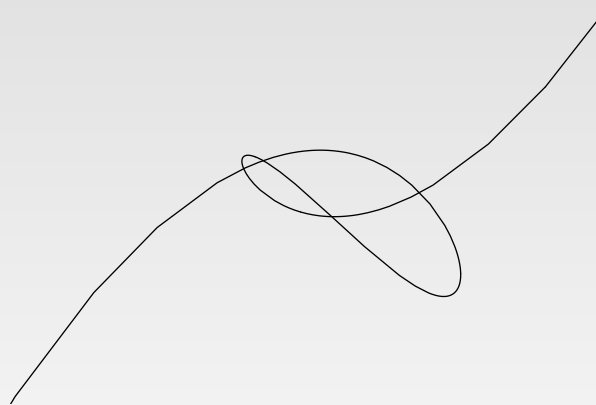


Inny przykład

Krzywa zależna od parametru λ .

$$\begin{cases} x_\lambda(t) &= t^3 - 15\lambda^2 t \\ y_\lambda(t) &= t^5 - 30\lambda^2 t^3 + 10\lambda^3 t^2 + 201\lambda^4 t, \end{cases}$$

$$\lambda = 0.83$$

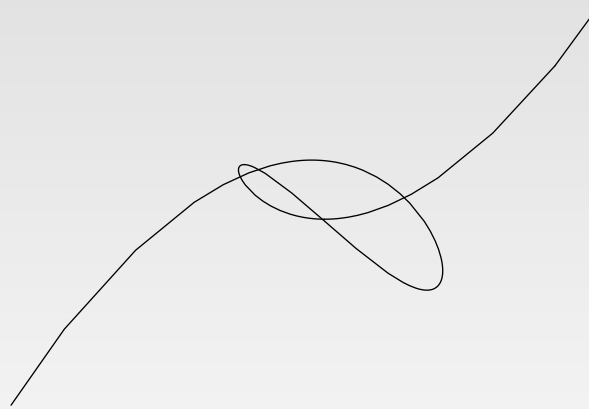


Inny przykład

Krzywa zależna od parametru λ .

$$\begin{cases} x_\lambda(t) &= t^3 - 15\lambda^2 t \\ y_\lambda(t) &= t^5 - 30\lambda^2 t^3 + 10\lambda^3 t^2 + 201\lambda^4 t, \end{cases}$$

$$\lambda = 0.81$$

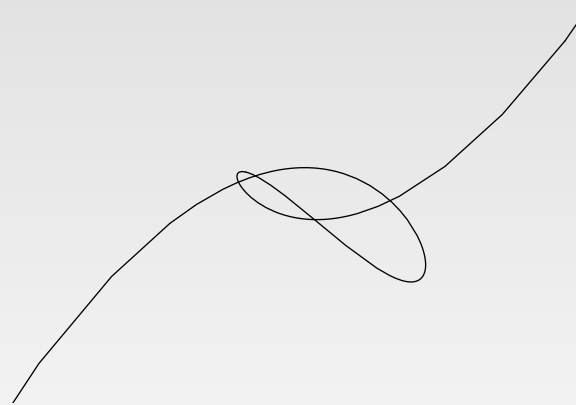


Inny przykład

Krzywa zależna od parametru λ .

$$\begin{cases} x_\lambda(t) &= t^3 - 15\lambda^2 t \\ y_\lambda(t) &= t^5 - 30\lambda^2 t^3 + 10\lambda^3 t^2 + 201\lambda^4 t, \end{cases}$$

$$\lambda = 0.79$$

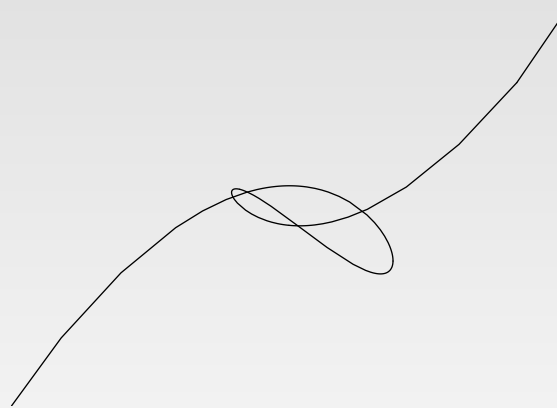


Inny przykład

Krzywa zależna od parametru λ .

$$\begin{cases} x_\lambda(t) &= t^3 - 15\lambda^2 t \\ y_\lambda(t) &= t^5 - 30\lambda^2 t^3 + 10\lambda^3 t^2 + 201\lambda^4 t, \end{cases}$$

$$\lambda = 0.75$$

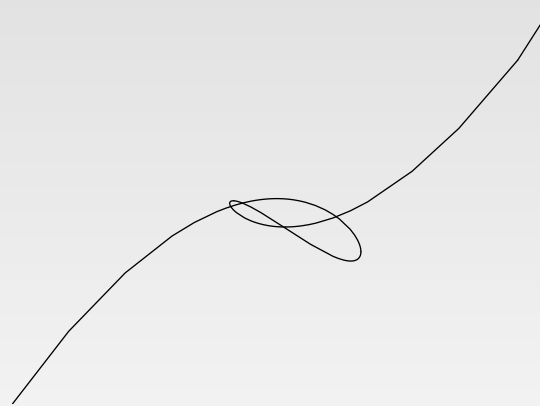


Inny przykład

Krzywa zależna od parametru λ .

$$\begin{cases} x_\lambda(t) &= t^3 - 15\lambda^2 t \\ y_\lambda(t) &= t^5 - 30\lambda^2 t^3 + 10\lambda^3 t^2 + 201\lambda^4 t, \end{cases}$$

$$\lambda = 0.7$$

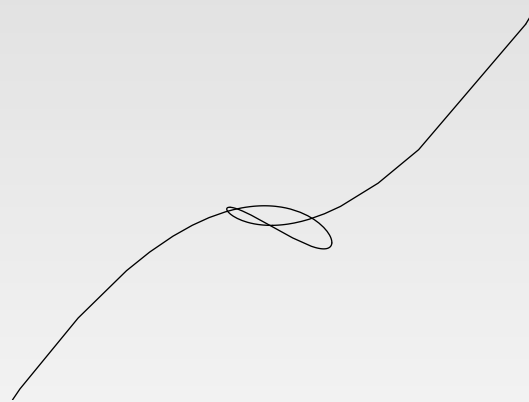


Inny przykład

Krzywa zależna od parametru λ .

$$\begin{cases} x_\lambda(t) &= t^3 - 15\lambda^2 t \\ y_\lambda(t) &= t^5 - 30\lambda^2 t^3 + 10\lambda^3 t^2 + 201\lambda^4 t, \end{cases}$$

$$\lambda = 0.65$$

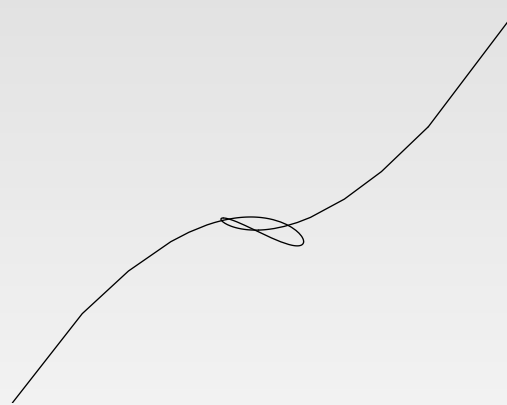


Inny przykład

Krzywa zależna od parametru λ .

$$\begin{cases} x_\lambda(t) &= t^3 - 15\lambda^2 t \\ y_\lambda(t) &= t^5 - 30\lambda^2 t^3 + 10\lambda^3 t^2 + 201\lambda^4 t, \end{cases}$$

$$\lambda = 0.6$$

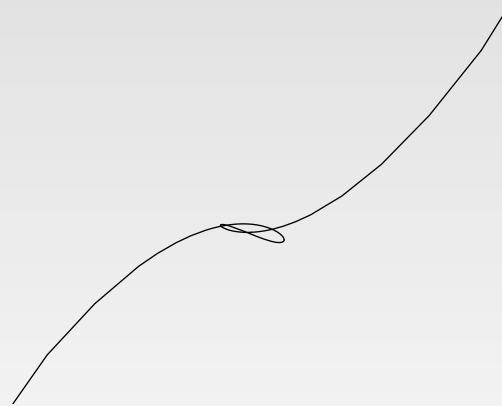


Inny przykład

Krzywa zależna od parametru λ .

$$\begin{cases} x_\lambda(t) &= t^3 - 15\lambda^2 t \\ y_\lambda(t) &= t^5 - 30\lambda^2 t^3 + 10\lambda^3 t^2 + 201\lambda^4 t, \end{cases}$$

$$\lambda = 0.55$$

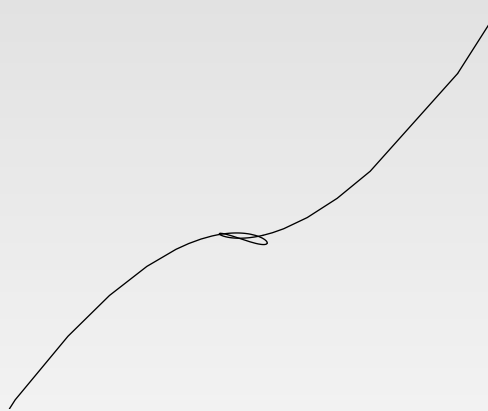


Inny przykład

Krzywa zależna od parametru λ .

$$\begin{cases} x_\lambda(t) &= t^3 - 15\lambda^2 t \\ y_\lambda(t) &= t^5 - 30\lambda^2 t^3 + 10\lambda^3 t^2 + 201\lambda^4 t, \end{cases}$$

$$\lambda = 0.5$$

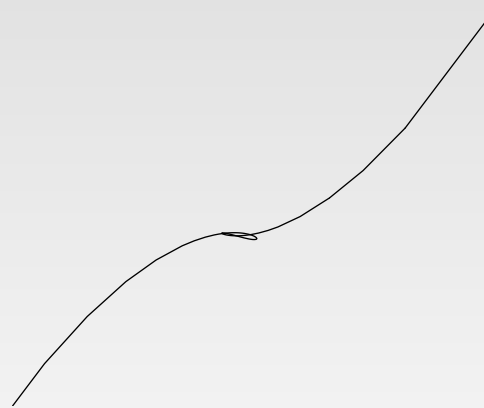


Inny przykład

Krzywa zależna od parametru λ .

$$\begin{cases} x_\lambda(t) &= t^3 - 15\lambda^2 t \\ y_\lambda(t) &= t^5 - 30\lambda^2 t^3 + 10\lambda^3 t^2 + 201\lambda^4 t, \end{cases}$$

$$\lambda = 0.45$$

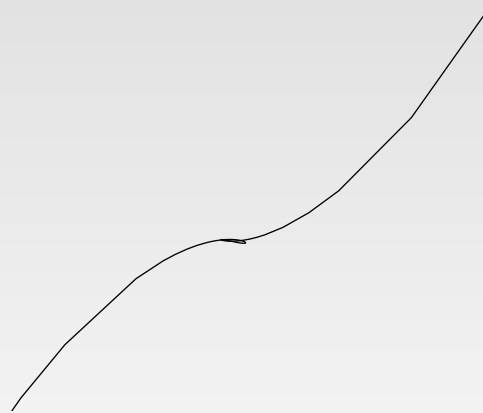


Inny przykład

Krzywa zależna od parametru λ .

$$\begin{cases} x_\lambda(t) &= t^3 - 15\lambda^2 t \\ y_\lambda(t) &= t^5 - 30\lambda^2 t^3 + 10\lambda^3 t^2 + 201\lambda^4 t, \end{cases}$$

$$\lambda = 0.4$$

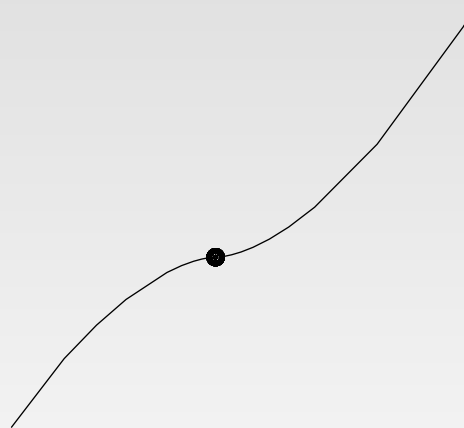


Inny przykład

Krzywa zależna od parametru λ .

$$\begin{cases} x_\lambda(t) &= t^3 - 15\lambda^2 t \\ y_\lambda(t) &= t^5 - 30\lambda^2 t^3 + 10\lambda^3 t^2 + 201\lambda^4 t, \end{cases}$$

$$\lambda = 0$$



Tutaj cztery punkty podwójne ukrywają się w punkcie osobliwym (t^3, t^5) . Dlatego $2\delta = 8$.

Formuła Serre'a

Dla krzywej stopnia d mamy

Formuła Serre'a

Dla krzywej stopnia d mamy

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum \delta_i$$

Formuła Serre'a

Dla krzywej stopnia d mamy

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum \delta_i$$

g — genus krzywej.

Formuła Serre'a

Dla krzywej stopnia d mamy

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum \delta_i$$

g — genus krzywej.

d — stopień krzywej.

Formuła Serre'a

Dla krzywej stopnia d mamy

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum \delta_i$$

g — genus krzywej.

d — stopień krzywej.

δ_i — liczba punktów podwójnych ukrytych w danym punkcie osobliwym.

Formuła Serre'a

Dla krzywej stopnia d mamy

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum \delta_i$$

g — genus krzywej.

d — stopień krzywej.

δ_i — liczba punktów podwójnych ukrytych w danym punkcie osobliwym.

\sum — suma przebiega po wszystkich punktach osobliwych i podwójnych krzywej.

Formuła Serre'a II

W naszym przypadku $g = 0$. A więc

$$\sum 2\delta_i = (d - 1)(d - 2).$$

Formuła Serre'a II

W naszym przypadku $g = 0$. A więc

$$\sum 2\delta_i = (d - 1)(d - 2).$$

Dla typowej krzywej wszystkie δ_i odpowiadają punktom podwójnym.

Formuła Serre'a II

W naszym przypadku $g = 0$. A więc

$$\sum 2\delta_i = (d - 1)(d - 2).$$

Dla typowej krzywej wszystkie δ_i odpowiadają punktom podwójnym. Jeśli zatem krzywa nie ma punktów podwójnych (albo ma jeden), to pozostałe muszą być **schowane** w punktach osobliwych.

Formuła Serre'a II

W naszym przypadku $g = 0$. A więc

$$\sum 2\delta_i = (d - 1)(d - 2).$$

Dla typowej krzywej wszystkie δ_i odpowiadają punktom podwójnym. Jeśli zatem krzywa nie ma punktów podwójnych (albo ma jeden), to pozostałe muszą być **schowane** w punktach osobliwych.

Mało punktów podwójnych \iff dużo punktów osobliwych.

Kowymiar I

Niezmiennikiem punktu osobliwego, który opisuje deformacje krzywej parametrycznej

Kowymiar I

Niezmiennikiem punktu osobliwego, który opisuje deformacje krzywej parametrycznej **kowymiar**.

Kowymiar I

Niezmiennikiem punktu osobliwego, który opisuje deformacje krzywej parametrycznej **kowymiar**.

Jeśli w otoczeniu punktu osobliwego z jedną gałęzią $x(t) \sim t^p$, $y(t) \sim t^q$, możemy zapisać

$$y = c_1 x^{1/p} + c_2 x^{2/p} + \dots + c_i x^{i/p} + \dots$$

Kowymiar I

Niezmiennikiem punktu osobliwego, który opisuje deformacje krzywej parametrycznej **kowymiar**.

Jeśli w otoczeniu punktu osobliwego z jedną gałęzią $x(t) \sim t^p$, $y(t) \sim t^q$, możemy zapisać

$$y = c_1 x^{1/p} + c_2 x^{2/p} + \dots + c_i x^{i/p} + \dots$$

$c_1, c_2, \dots, c_i, \dots$ — współczynniki Puiseux.

Kowymiar I

Niezmiennikiem punktu osobliwego, który opisuje deformacje krzywej parametrycznej **kowymiar**.

Jeśli w otoczeniu punktu osobliwego z jedną gałęzią $x(t) \sim t^p$, $y(t) \sim t^q$, możemy zapisać

$$y = c_1 x^{1/p} + c_2 x^{2/p} + \dots + c_i x^{i/p} + \dots$$

$c_1, c_2, \dots, c_i, \dots$ — współczynniki Puiseux.

Kowymiarem lokalnym ν nazywamy ilość *istotnych* współczynników Puiseux, które się zerują.

Kowymiar I

Niezmiennikiem punktu osobliwego, który opisuje deformacje krzywej parametrycznej **kowymiar**.

Jeśli w otoczeniu punktu osobliwego z jedną gałęzią $x(t) \sim t^p$, $y(t) \sim t^q$, możemy zapisać

$$y = c_1 x^{1/p} + c_2 x^{2/p} + \dots + c_i x^{i/p} + \dots$$

$c_1, c_2, \dots, c_i, \dots$ — współczynniki Puiseux.

Kowymiarem lokalnym ν nazywamy ilość *istotnych* współczynników Puiseux, które się zerują. ν zależy wyłącznie od ciągu charakterystycznego osobliwości.

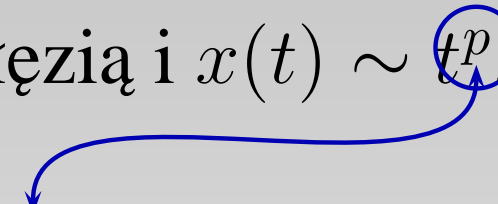
Kowymiar II

Dla osobliwości z jedną gałęzią i $x(t) \sim t^p$, $y(t) \sim t^q$ mamy:

$$\mu \leq p\nu.$$

Kowymiar II

Dla osobliwości z jedną gałęzią i $x(t) \sim t^p$, $y(t) \sim t^q$
mamy:

$$\mu \leq p\nu.$$


Kowymiar II

Dla osobliwości z jedną gałęzią i $x(t) \sim t^p$, $y(t) \sim t^q$ mamy:

$$\mu \leq p\nu.$$

Gdzie μ jest liczbą Milnora ($2 \times$ ilość punktów podwójnych ukrytych w punkcie osobliwym), zaś

Kowymiar II

Dla osobliwości z jedną gałęzią i $x(t) \sim t^p$, $y(t) \sim t^q$ mamy:

$$\mu \leq p\nu.$$

Gdzie μ jest liczbą Milnora ($2 \times$ ilość punktów podwójnych ukrytych w punkcie osobliwym), zaś ν jest dopiero co zdefiniowanym kowymiarem.

Kowymiar II

Dla osobliwości z jedną gałęzią i $x(t) \sim t^p$, $y(t) \sim t^q$ mamy:

$$\mu \leq p\nu.$$

Gdzie μ jest liczbą Milnora ($2 \times$ ilość punktów podwójnych ukrytych w punkcie osobliwym), zaś ν jest dopiero co zdefiniowanym kowymiarem.

Kowymiar II

Dla osobliwości z jedną gałęzią i $x(t) \sim t^p$, $y(t) \sim t^q$ mamy:

$$\mu \leq p\nu.$$

Gdzie μ jest liczbą Milnora ($2 \times$ ilość punktów podwójnych ukrytych w punkcie osobliwym), zaś ν jest dopiero co zdefiniowanym kowymiarem.

Można znaleźć wszystkie przypadki, dla których zachodzi równość.

Kowymiar zewnętrzny

Określamy kowymiar zewnętrzny jako

Kowymiar zewnętrzny

Określamy kowymiar zewnętrzny jako

$$\text{ext } \nu = \nu + p - 2.$$

Kowymiar zewnętrzny

Określamy kowymiar zewnętrzny jako

$$\text{ext } \nu = \nu + p - 2.$$

Interpretacja. Kowymiar zewnętrzny można związać z deformacjami kielka krzywej osobliwej zadanej parametrycznie, inaczej mówiąc z deformacjami, które nie zmieniają genusu normalizacji...

Kowymiar zewnętrzny

Określamy kowymiar zewnętrzny jako

$$\text{ext } \nu = \nu + p - 2.$$

Interpretacja. Kowymiar zewnętrzny można związać z deformacjami kielka krzywej osobliwej zadanej parametrycznie, inaczej mówiąc z deformacjami, które nie zmieniają genusu normalizacji...
...ale z tego w pracy nie korzystamy.

Nierówność Żołądka

W przypadku jednego punktu w nieskończoności, wymiar przestrzeni krzywych parametrycznych wynosi

Nierówność Żołądka

W przypadku jednego punktu w nieskończoności, wymiar przestrzeni krzywych parametrycznych wynosi $a + c$.

Nierówność Żołądka

W przypadku jednego punktu w nieskończoności, wymiar przestrzeni krzywych parametrycznych wynosi $a + c$.

W przypadku dwóch punktów

Nierówność Żołądka

W przypadku jednego punktu w nieskończoności, wymiar przestrzeni krzywych parametrycznych wynosi $a + c$.

W przypadku dwóch punktów $a + b + c + d$.

Nierówność Żołądka

W przypadku jednego punktu w nieskończoności, wymiar przestrzeni krzywych parametrycznych wynosi $a + c$.

W przypadku dwóch punktów $a + b + c + d$.

Niech g oznacza wymiar grupy automorfizmów.

Nierówność Żołądka

W przypadku jednego punktu w nieskończoności, wymiar przestrzeni krzywych parametrycznych wynosi $a + c$.

W przypadku dwóch punktów $a + b + c + d$.

Niech g oznacza wymiar grupy automorfizmów.

Wówczas zachodzi

$$\sum \text{ext } \nu_i \leq a + c - g$$

Nierówność Żołądka

W przypadku jednego punktu w nieskończoności, wymiar przestrzeni krzywych parametrycznych wynosi $a + c$.

W przypadku dwóch punktów $a + b + c + d$.

Niech g oznacza wymiar grupy automorfizmów.

Wówczas zachodzi

$$\sum \text{ext } \nu_i \leq a + c - g$$

Suma przebiega po wszystkich punktach osobliwych, wraz z nieskończonością

Nierówność Żołądka

W przypadku jednego punktu w nieskończoności, wymiar przestrzeni krzywych parametrycznych wynosi $a + c$.

W przypadku dwóch punktów $a + b + c + d$.

Niech g oznacza wymiar grupy automorfizmów.

Wówczas zachodzi

$$\sum ext \nu_i \leq a + c - g$$

Suma przebiega po wszystkich punktach osobliwych, wraz z nieskończonością $ext \nu_i$ oznaczają kowymiary zewnętrzne.

Nierówność Żołądka

W przypadku jednego punktu w nieskończoności, wymiar przestrzeni krzywych parametrycznych wynosi $a + c$.

W przypadku dwóch punktów $a + b + c + d$.

Niech g oznacza wymiar grupy automorfizmów.

Wówczas zachodzi

$$\sum \text{ext } \nu_i \leq a + c - g$$

Suma przebiega po wszystkich punktach osobliwych, wraz z nieskończonością $\text{ext } \nu_i$ oznaczają kowymiary zewnętrzne.

Nierówność Żołądka

W przypadku jednego punktu w nieskończoności, wymiar przestrzeni krzywych parametrycznych wynosi $a + c$

W przypadku dwóch punktów $a + b + c + d$.

Niech g oznacza wymiar grupy automorfizmów.

Wówczas zachodzi

$$\sum \text{ext } \nu_i \leq a + c - g$$

Suma przebiega po wszystkich punktach osobliwych, wraz z nieskończonością $\text{ext } \nu_i$ oznaczają kowymiary zewnętrzne.

Nierówność Żołądka

W przypadku jednego punktu w nieskończoności, wymiar przestrzeni krzywych parametrycznych wynosi $a + c$.

W przypadku dwóch punktów $a + b + c + d$.

Niech g oznacza wymiar grupy automorfizmów.

Wówczas zachodzi

$$\sum \text{ext } \nu_i \leq a + b + c + d - g$$

Suma przebiega po wszystkich punktach osobliwych, wraz z nieskończonością $\text{ext } \nu_i$ oznaczają kowymiary zewnętrzne.

Nierówność Żołądka

W przypadku jednego punktu w nieskończoności, wymiar przestrzeni krzywych parametrycznych wynosi $a + c$.

W przypadku dwóch punktów $a + b + c + d$.

Niech g oznacza wymiar grupy automorfizmów.

Wówczas zachodzi

$$\sum \text{ext } \nu_i \leq a + b + c + d - g$$

Suma przebiega po wszystkich punktach osobliwych, wraz z nieskończonością

$\text{ext } \nu_i$ oznaczają kowymiary zewnętrzne. Krzywa ograniczonego stopnia nie może mieć za dużo punktów osobliwych.

Oszacowania na krotność

Dla krzywej zadanej wzorem

Oszacowania na krotność

Dla krzywej zadanej wzorem

$$\begin{cases} x(t) &= t^a + \alpha_1 t^{a-1} + \dots + \alpha_a \\ y(t) &= t^c + \beta_1 t^{c-1} + \dots + \beta_c. \end{cases}$$

Widzimy, że \dot{x} jest wielomianem stopnia $a - 1$.

Oszacowania na krotność

Dla krzywej zadanej wzorem

$$\begin{cases} x(t) &= t^a + \alpha_1 t^{a-1} + \dots + \alpha_a \\ y(t) &= t^c + \beta_1 t^{c-1} + \dots + \beta_c. \end{cases}$$

Widzimy, że \dot{x} jest wielomianem stopnia $a - 1$.
Jeśli teraz t_0 jest punktem osobliwym krzywej
 $(x(t), y(t))$, oraz

Oszacowania na krotność

Dla krzywej zadanej wzorem

$$\begin{cases} x(t) &= t^a + \alpha_1 t^{a-1} + \dots + \alpha_a \\ y(t) &= t^c + \beta_1 t^{c-1} + \dots + \beta_c. \end{cases}$$

Widzimy, że \dot{x} jest wielomianem stopnia $a - 1$.
Jeśli teraz t_0 jest punktem osobliwym krzywej $(x(t), y(t))$, oraz

$$x(t) \sim (t - t_0)^{p_0}$$

to

Oszacowania na krotność

Dla krzywej zadanej wzorem

$$\begin{cases} x(t) &= t^a + \alpha_1 t^{a-1} + \dots + \alpha_a \\ y(t) &= t^c + \beta_1 t^{c-1} + \dots + \beta_c. \end{cases}$$

Widzimy, że \dot{x} jest wielomianem stopnia $a - 1$.
Jeśli teraz t_0 jest punktem osobliwym krzywej $(x(t), y(t))$, oraz

$$x(t) \sim (t - t_0)^{p_0}$$

to \dot{x} musi dzielić się przez $(t - t_0)^{p_0 - 1}$.

Oszacowania na krotność II

Powyższe rozumowanie daje

$$\sum (p_i - 1) \leq a - 1.$$

Suma przebiega wszystkie skończone punkty osobliwe krzywej x, y .

Oszacowania na krotność II

Powyższe rozumowanie daje

$$\sum (p_i - 1) \leq a - 1.$$

Suma przebiega wszystkie **skończone** punkty osobliwe krzywej x, y .

Podobne oszacowanie można wypisać dla krzywych z dwoma punktami w nieskończoności.

Połączenie oszacowań

Łączymy teraz znane oszacowania (dla krzywych wielomianowych)

Połączenie oszacowań

Łączymy teraz znane oszacowania (dla krzywych wielomianowych)

$$\text{Serre'a} \quad \sum 2\delta_i = (c - 1)(c - 2)$$

Połączenie oszacowań

Łączymy teraz znane oszacowania (dla krzywych wielomianowych)

$$\sum 2\delta_i = (c - 1)(c - 2)$$

$$\mu \leq p\nu \quad 2\delta_i = \mu_i \leq p_i(\text{ext } \nu_i - p_i + 2).$$

Połączenie oszacowań

Łączymy teraz znane oszacowania (dla krzywych wielomianowych)

$$\sum 2\delta_i = (c - 1)(c - 2)$$

$$2\delta_i = \mu_i \leq p_i(\text{ext } \nu_i - p_i + 2).$$

Żołądka

$$\sum \text{ext } \nu_i \leq a + c - g$$

Połączenie oszacowań

Łączymy teraz znane oszacowania (dla krzywych wielomianowych)

$$\sum 2\delta_i = (c - 1)(c - 2)$$

$$2\delta_i = \mu_i \leq p_i(\text{ext } \nu_i - p_i + 2).$$

$$\sum \text{ext } \nu_i \leq a + c - g$$

oraz **krotności** $\sum (p_i - 1) \leq a - 1$

Połączenie oszacowań

Łączymy teraz znane oszacowania (dla krzywych wielomianowych)

$$\sum 2\delta_i = (c - 1)(c - 2)$$

$$2\delta_i = \mu_i \leq p_i(\text{ext } \nu_i - p_i + 2).$$

$$\sum \text{ext } \nu_i \leq a + c - g$$

oraz
$$\sum (p_i - 1) \leq a - 1$$

Mamy więc pewien zestaw nierówności.

Połączenie oszacowań

Łączymy teraz znane oszacowania (dla krzywych wielomianowych)

$$\sum 2\delta_i = (c-1)(c-2)$$
$$2\delta_i = \mu_i \leq p_i(\text{ext } \nu_i - p_i + 2).$$

$$\sum \text{ext } \nu_i \leq a + c - g$$

oraz
$$\sum (p_i - 1) \leq a - 1$$

Mamy więc pewien zestaw nierówności.

Połączenie oszacowań

Łączymy teraz znane oszacowania (dla krzywych wielomianowych)

$$\sum 2\delta_i = (c-1)(c-2)$$

$$2\delta_i = \mu_i \leq p_i(\text{ext } \nu_i - p_i + 2).$$

$$\sum \text{ext } \nu_i \leq a + c - g$$

oraz
$$\sum (p_i - 1) \leq a - 1$$

Mamy więc pewien zestaw nierówności.

Połączenie oszacowań

Łączymy teraz znane oszacowania (dla krzywych wielomianowych)

$$\sum 2\delta_i = (c - 1)(c - 2)$$

$$2\delta_i = \mu_i \leq p_i(\text{ext } \nu_i \rightarrow p_i + 2).$$

$$\sum \text{ext } \nu_i \leq a + c - g$$

oraz

$$\sum (p_i \leftarrow 1) \leq a - 1$$

Mamy więc pewien zestaw nierówności.

Połączenie oszacowań

Łączymy teraz znane oszacowania (dla krzywych wielomianowych)

$$\sum 2\delta_i = (c - 1)(c - 2)$$

$$2\delta_i = \mu_i \leq p_i(\text{ext } \nu_i - p_i + 2).$$

$$\sum \text{ext } \nu_i \leq a + c - g$$

oraz
$$\sum (p_i - 1) \leq a - 1$$

Mamy więc pewien zestaw nierówności. Szukamy wszystkich krzywych, które je spełniają.

Metoda

Metoda poszukiwań składa się z trzech elementów:

Metoda

Metoda poszukiwań składa się z trzech elementów:
rachunki,

Metoda

Metoda poszukiwań składa się z trzech elementów:

rachunki,

rachunki,

Metoda

Metoda poszukiwań składa się z trzech elementów:

rachunki,

rachunki,

rachunki.

Rezultat

W przypadku krzywych z jednym punktem w nieskończoności uzyskujemy

Rezultat

W przypadku krzywych z jednym punktem w nieskończoności uzyskujemy

16 serii

Rezultat

W przypadku krzywych z jednym punktem w nieskończoności uzyskujemy

16 serii i 5 przypadków szczególnych.

Rezultat

W przypadku krzywych z jednym punktem w nieskończoności uzyskujemy

16 serii i 5 przypadków szczególnych.

Dla krzywych z dwoma punktami w nieskończoności mamy

Rezultat

W przypadku krzywych z jednym punktem w nieskończoności uzyskujemy

16 serii i 5 przypadków szczególnych.

Dla krzywych z dwoma punktami w nieskończoności mamy

18 serii

Rezultat

W przypadku krzywych z jednym punktem w nieskończoności uzyskujemy

16 serii i 5 przypadków szczególnych.

Dla krzywych z dwoma punktami w nieskończoności mamy

18 serii i 5 przypadków szczególnych,

Rezultat

W przypadku krzywych z jednym punktem w nieskończoności uzyskujemy

16 serii i 5 przypadków szczególnych.

Dla krzywych z dwoma punktami w nieskończoności mamy

18 serii i 5 przypadków szczególnych,

przy czym jedna seria ma ciągłe parametry.

Rezultat

W przypadku krzywych z jednym punktem w nieskończoności uzyskujemy

16 serii i 5 przypadków szczególnych.

Dla krzywych z dwoma punktami w nieskończoności mamy

18 serii i 5 przypadków szczególnych,

przy czym jedna seria ma ciągłe parametry.

Ponadto w tych 23 przypadkach zawiera się

Rezultat

W przypadku krzywych z jednym punktem w nieskończoności uzyskujemy

16 serii i 5 przypadków szczególnych.

Dla krzywych z dwoma punktami w nieskończoności mamy

18 serii i 5 przypadków szczególnych,

przy czym jedna seria ma ciągłe parametry.

Ponadto w tych 23 przypadkach zawiera się

7 serii

Rezultat

W przypadku krzywych z jednym punktem w nieskończoności uzyskujemy

16 serii i 5 przypadków szczególnych.

Dla krzywych z dwoma punktami w nieskończoności mamy

18 serii i 5 przypadków szczególnych,

przy czym jedna seria ma ciągłe parametry.

Ponadto w tych 23 przypadkach zawiera się

7 serii i 2 przypadki szczególne

Rezultat

W przypadku krzywych z jednym punktem w nieskończoności uzyskujemy

16 serii i 5 przypadków szczególnych.

Dla krzywych z dwoma punktami w nieskończoności mamy

18 serii i 5 przypadków szczególnych,

przy czym jedna seria ma ciągle parametry.

Ponadto w tych 23 przypadkach zawiera się

7 serii i 2 przypadki szczególne

gładkich zanurzeń $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^2$.

Odzwzorowania $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$

(a) $x = t^2, y = (t^2 - 1)^k t^{2l+1}, k = 1, 2, \dots,$
 $l = 0, 1, \dots;$

Odzworowania $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$

(a) $x = t^2, y = (t^2 - 1)^k t^{2l+1}, k = 1, 2, \dots,$
 $l = 0, 1, \dots;$

(b) $x = t^3, y = t^{3k+2} - t^{3k+1}, k = 1, 2, \dots;$

Odzwzorowania $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$

(a) $x = t^2, y = (t^2 - 1)^k t^{2l+1}, k = 1, 2, \dots,$
 $l = 0, 1, \dots;$

(b) $x = t^3, y = t^{3k+2} - t^{3k+1}, k = 1, 2, \dots;$

(c) $x = t^4, y = t^{4k+2} - t^{4k+1}, k = 1, 2, \dots;$

Odzworowania $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$

(a) $x = t^2, y = (t^2 - 1)^k t^{2l+1}, k = 1, 2, \dots,$
 $l = 0, 1, \dots;$

(b) $x = t^3, y = t^{3k+2} - t^{3k+1}, k = 1, 2, \dots;$

(c) $x = t^4, y = t^{4k+2} - t^{4k+1}, k = 1, 2, \dots;$

(d) $x = t^4, y = t^{4k+3} - t^{4k+2}, k = 0, 1, \dots;$

Odzwzorowania $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$

(a) $x = t^2, y = (t^2 - 1)^k t^{2l+1}, k = 1, 2, \dots, l = 0, 1, \dots;$

(b) $x = t^3, y = t^{3k+2} - t^{3k+1}, k = 1, 2, \dots;$

(c) $x = t^4, y = t^{4k+2} - t^{4k+1}, k = 1, 2, \dots;$

(d) $x = t^4, y = t^{4k+3} - t^{4k+2}, k = 0, 1, \dots;$

(e) $x = t^6, y = t^{6k+3} - t^{6k+2}, k = 1, 2, \dots;$

Odzwzorowania $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$

(a) $x = t^2, y = (t^2 - 1)^k t^{2l+1}, k = 1, 2, \dots, l = 0, 1, \dots;$

(b) $x = t^3, y = t^{3k+2} - t^{3k+1}, k = 1, 2, \dots;$

(c) $x = t^4, y = t^{4k+2} - t^{4k+1}, k = 1, 2, \dots;$

(d) $x = t^4, y = t^{4k+3} - t^{4k+2}, k = 0, 1, \dots;$

(e) $x = t^6, y = t^{6k+3} - t^{6k+2}, k = 1, 2, \dots;$

(f) $x = t^6, y = t^{6k+4} - t^{6k+3}, k = 0, 1, \dots;$

Odzworowania $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$

(a) $x = t^2, y = (t^2 - 1)^k t^{2l+1}, k = 1, 2, \dots,$
 $l = 0, 1, \dots;$

(b) $x = t^3, y = t^{3k+2} - t^{3k+1}, k = 1, 2, \dots;$

(c) $x = t^4, y = t^{4k+2} - t^{4k+1}, k = 1, 2, \dots;$

(d) $x = t^4, y = t^{4k+3} - t^{4k+2}, k = 0, 1, \dots;$

(e) $x = t^6, y = t^{6k+3} - t^{6k+2}, k = 1, 2, \dots;$

(f) $x = t^6, y = t^{6k+4} - t^{6k+3}, k = 0, 1, \dots;$

(g) $x = t^a(t - 1)^{kb}, y = t^c(t - 1)^{kd},$
 $\kappa = |ad - bc| = 1, k = 1, 2, \dots,$
 $2 < a + kb < c + kd;$

Odzwzorowania $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$

(h) $x = t^{2a}(t - 1)^{2b}$, $y = t^{2c}(t - 1)^{2d}$, $\kappa = 1$,
 $2 < ka < kc$;

Odzwzorowania $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$

(h) $x = t^{2a}(t - 1)^{2b}$, $y = t^{2c}(t - 1)^{2d}$, $\kappa = 1$,
 $2 < ka < kc$;

(i) $x = t^{ka-b}(t - 1)^b$, $y = t^{kc-d}(t - 1)^d$, $\kappa = 1$,
 $k = 1, 2, \dots$;

Odzworowania $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$

(h) $x = t^{2a}(t - 1)^{2b}$, $y = t^{2c}(t - 1)^{2d}$, $\kappa = 1$,
 $2 < ka < kc$;

(i) $x = t^{ka-b}(t - 1)^b$, $y = t^{kc-d}(t - 1)^d$, $\kappa = 1$,
 $k = 1, 2, \dots$;

(j) $x = t^2(t - 1)$, $y = t^{2k+1}(t - 1)^k(t - \frac{4}{3})$,
 $k = 1, 2, \dots$;

Odzworowania $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$

(h) $x = t^{2a}(t - 1)^{2b}$, $y = t^{2c}(t - 1)^{2d}$, $\kappa = 1$,
 $2 < ka < kc$;

(i) $x = t^{ka-b}(t - 1)^b$, $y = t^{kc-d}(t - 1)^d$, $\kappa = 1$,
 $k = 1, 2, \dots$;

(j) $x = t^2(t - 1)$, $y = t^{2k+1}(t - 1)^k(t - \frac{4}{3})$,
 $k = 1, 2, \dots$;

(k) $x = t^3(t - 1)$, $y = t^{3k+1}(t - 1)^k(t - \frac{3}{2})$,
 $k = 1, 2, \dots$;

Odzworowania $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$

(h) $x = t^{2a}(t - 1)^{2b}$, $y = t^{2c}(t - 1)^{2d}$, $\kappa = 1$,
 $2 < ka < kc$;

(i) $x = t^{ka-b}(t - 1)^b$, $y = t^{kc-d}(t - 1)^d$, $\kappa = 1$,
 $k = 1, 2, \dots$;

(j) $x = t^2(t - 1)$, $y = t^{2k+1}(t - 1)^k(t - \frac{4}{3})$,
 $k = 1, 2, \dots$;

(k) $x = t^3(t - 1)$, $y = t^{3k+1}(t - 1)^k(t - \frac{3}{2})$,
 $k = 1, 2, \dots$;

(l) $x = [t(t - 1)]^{2k}$, $y = [t(t - 1)]^{(2l+1)k}(t - \frac{1}{2})$,
 $k = 1, 2, \dots$, $l = 0, 1, \dots$;

Odzwzorowania $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$

$$(m) \quad x = [t(t-1)]^{2k+1}, \quad y = x^l [t(t-1)]^k \left(t - \frac{1}{2}\right),$$
$$k = 0, 1, \dots, \quad l = 0, 1, \dots, \quad (k, l) \neq (0, 0), (0, 1);$$

Odzwzorowania $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$

- (m) $x = [t(t - 1)]^{2k+1}$, $y = x^l [t(t - 1)]^k (t - \frac{1}{2})$,
 $k = 0, 1, \dots$, $l = 0, 1, \dots$, $(k, l) \neq (0, 0), (0, 1)$;
- (n) $x = t^k (t - 1)^{k+1} (t - \frac{1}{2}) y^l$, $y = t^{2k} (t - 1)^{2k+2}$,
 $k = 1, 2, \dots$, $l = 0, 1, \dots$;

Odzworowania $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$

$$(m) \quad x = [t(t-1)]^{2k+1}, \quad y = x^l [t(t-1)]^k (t - \frac{1}{2}),$$
$$k = 0, 1, \dots, \quad l = 0, 1, \dots, \quad (k, l) \neq (0, 0), (0, 1);$$

$$(n) \quad x = t^k (t-1)^{k+1} (t - \frac{1}{2}) y^l, \quad y = t^{2k} (t-1)^{2k+2},$$
$$k = 1, 2, \dots, \quad l = 0, 1, \dots;$$

$$(o) \quad x = t^{2k-1} (t-1)^{2k+1}, \quad y = x^l t^{k-1} (t-1)^k (t - \frac{1}{2}),$$
$$k = 1, 2, \dots, \quad l = 1, \dots;$$

Odzworowania $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$

(m) $x = [t(t - 1)]^{2k+1}, y = x^l [t(t - 1)]^k (t - \frac{1}{2}),$
 $k = 0, 1, \dots, l = 0, 1, \dots, (k, l) \neq (0, 0), (0, 1);$

(n) $x = t^k (t - 1)^{k+1} (t - \frac{1}{2}) y^l, y = t^{2k} (t - 1)^{2k+2},$
 $k = 1, 2, \dots, l = 0, 1, \dots;$

(o) $x = t^{2k-1} (t - 1)^{2k+1}, y = x^l t^{k-1} (t - 1)^k (t - \frac{1}{2}),$
 $k = 1, 2, \dots, l = 1, \dots;$

(p) $x = t^3 (t - 1)^3, y = t(t - 1)(t - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}i\sqrt{3})x^k,$
 $k = 1, 2, \dots.$

Odzwzorowania $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$

(q) $x = t^3 - 3t, y = t^4 - 2t^2;$

Odzwzorowania $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$

(q) $x = t^3 - 3t, y = t^4 - 2t^2;$

(r) $x = t^3 - 3t, y = t^5 - 2\sqrt{-2}t^4 + 11\sqrt{-2}t^2 - \frac{37}{4}t;$

Odzwzorowania $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$

(q) $x = t^3 - 3t, y = t^4 - 2t^2;$

(r) $x = t^3 - 3t, y = t^5 - 2\sqrt{-2}t^4 + 11\sqrt{-2}t^2 - \frac{37}{4}t;$

(s) $x = t^3 - 3t, y = t^5 + 10t^4 + 80t^2 - 205t;$

Odzwzorowania $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$

(q) $x = t^3 - 3t, y = t^4 - 2t^2;$

(r) $x = t^3 - 3t, y = t^5 - 2\sqrt{-2}t^4 + 11\sqrt{-2}t^2 - \frac{37}{4}t;$

(s) $x = t^3 - 3t, y = t^5 + 10t^4 + 80t^2 - 205t;$

(t) $x = t^3 - 3t, y = t^5 - \frac{5}{2}t^4 + 5t^2 - 5t;$

Odzwzorowania $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$

$$(q) \quad x = t^3 - 3t, \quad y = t^4 - 2t^2;$$

$$(r) \quad x = t^3 - 3t, \quad y = t^5 - 2\sqrt{-2}t^4 + 11\sqrt{-2}t^2 - \frac{37}{4}t;$$

$$(s) \quad x = t^3 - 3t, \quad y = t^5 + 10t^4 + 80t^2 - 205t;$$

$$(t) \quad x = t^3 - 3t, \quad y = t^5 - \frac{5}{2}t^4 + 5t^2 - 5t;$$

$$(u) \quad x = t^3 - 3t, \quad y = t^5 - \frac{7}{2}t^4 - t^2 + 11t.$$

Odzwzorowania $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^2$

- (a) $x = t^m, y = t^n + \gamma_1 t^{-m} + \gamma_2 t^{-2m} + \dots + \gamma_k t^{-mk}$,
gdzie $m > 0, \text{NWD}(m, |n|) = 1, k = 0, 1, \dots,$
 $\gamma_j \in \mathbb{C}, \gamma_k = 1$ (jeśli $k > 0$) oraz $k > 0$ jeśli
 $n > 0$. oraz co najmniej jedno $\gamma_i \neq 0$
jeśli $m > 0$.

Odzwzorowania $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^2$

- (a) $x = t^m, y = t^n + \gamma_1 t^{-m} + \gamma_2 t^{-2m} + \dots + \gamma_k t^{-mk}$,
gdzie $m > 0, \text{NWD}(m, |n|) = 1, k = 0, 1, \dots,$
 $\gamma_j \in \mathbb{C}, \gamma_k = 1$ (jeśli $k > 0$) oraz $k > 0$ jeśli
 $n > 0$. oraz co najmniej jedno $\gamma_i \neq 0$ jeśli $m > 0$.
- (b) $x = t(t - 1), y = (x + \frac{1}{4})^m x^n R_l(1/t)$, gdzie
 $m, n = 0, 1, \dots$ a R_l jest wielomianem
spełniającym
$$R_l(1/t) - R_l(1/(1 - t)) = (2t - 1)t^{-l}(1 - t)^{-l},$$

 $l = 1, 2, \dots$

Odzworowania $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^2$

- (a) $x = t^m, y = t^n + \gamma_1 t^{-m} + \gamma_2 t^{-2m} + \dots + \gamma_k t^{-mk}$,
gdzie $m > 0, NWD(m, |n|) = 1, k = 0, 1, \dots,$
 $\gamma_j \in \mathbb{C}, \gamma_k = 1$ (jeśli $k > 0$) oraz $k > 0$ jeśli
 $n > 0$. oraz co najmniej jedno $\gamma_i \neq 0$ jeśli $m > 0$.
- (b) $x = t(t - 1), y = (x + \frac{1}{4})^m x^n R_l(1/t)$, gdzie
 $m, n = 0, 1, \dots$ a R_l jest wielomianem
spełniającym
$$R_l(1/t) - R_l(1/(1 - t)) = (2t - 1)t^{-l}(1 - t)^{-l},$$

 $l = 1, 2, \dots$
- (c) $x = t^{mn}(t - 1), y = S_k^+(1/t)$, gdzie $mn \geq 2,$
 $k = 1, 2, \dots$. S_k są wielomianami
zdefiniowanymi rekurencyjnie przez $S_0^+(u) = u^n,$
 $S_{k+1}^+(u) = [S_k^+(u) - S_k^+(1)]u^{mn+1}/(u - 1).$

Odzwzorowania $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^2$

(d) $x = t^{mn-1}(t-1)$, $y = T_k^+(1/t)$, gdzie $mn \geq 2$,
 $k = 1, 2, \dots$. T_k^+ są wielomianami określonymi rekurencyjnie przez $T_0^+(u) = u^{mn}$,
 $T_{k+1}^+(u) = [T_k^+(u) - T_k^+(1)]u^{mn}/(u-1)$.

Odzworowania $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^2$

- (d) $x = t^{mn-1}(t-1)$, $y = T_k^+(1/t)$, gdzie $mn \geq 2$,
 $k = 1, 2, \dots$. T_k^+ są wielomianami określonymi rekurencyjnie przez $T_0^+(u) = u^{mn}$,
 $T_{k+1}^+(u) = [T_k^+(u) - T_k^+(1)]u^{mn}/(u-1)$.
- (e) $x = t^{mn}(t-1)$, $y = S_k^-(1/t)$, gdzie $mn \geq 2$,
 $k = 1, \dots$, a S_m^- jest określone przez warunki:
 $S_0^-(u) = u^{-mn}$,
 $S_{k+1}^-(u) = [S_k^-(u) - S_k^-(1)]u^{mn+1}/(u-1)$.

Odzworowania $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^2$

(d) $x = t^{mn-1}(t-1)$, $y = T_k^+(1/t)$, gdzie $mn \geq 2$,
 $k = 1, 2, \dots$. T_k^+ są wielomianami określonymi rekurencyjnie przez $T_0^+(u) = u^{mn}$,
 $T_{k+1}^+(u) = [T_k^+(u) - T_k^+(1)]u^{mn}/(u-1)$.

(e) $x = t^{mn}(t-1)$, $y = S_k^-(1/t)$, gdzie $mn \geq 2$,
 $k = 1, \dots$, a S_m^- jest określone przez warunki:
 $S_0^-(u) = u^{-mn}$,
 $S_{k+1}^-(u) = [S_k^-(u) - S_k^-(1)]u^{mn+1}/(u-1)$.

(f) $x = t^{mn-1}(t-1)$, $y = T_k^-(1/t)$, gdzie $mn \geq 2$,
 $k = 1, 2, \dots$ a T_m^- zadaje się rekurencyjnie przez:
 $T_0^-(u) = u^{-mn}$,
 $T_{k+1}^-(u) = [T_k^-(u) - T_k^-(1)]u^{mn}/(u-1)$.

Odzworowania $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^2$

$$(g) \quad x = t^2(t - 1), \quad y = U_k(1/t), \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$U_1(u) = 3u + u^2,$$

$$U_{k+1}(u) = [U_k(u) - U_k(1)]u^3/(u - 1).$$

Odzworowania $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^2$

(g) $x = t^2(t - 1), y = U_k(1/t), k = 1, 2, \dots,$

$$U_1(u) = 3u + u^2,$$

$$U_{k+1}(u) = [U_k(u) - U_k(1)]u^3/(u - 1).$$

(h) $x = t^3(t - 1), y = V_k(1/t), V_1(u) = 2u^2 - u^3,$

$$V_{k+1}(u) = [V_k(u) - V_k(1)]u^4/(u - 1).$$

Odzworowania $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^2$

(g) $x = t^2(t - 1), y = U_k(1/t), k = 1, 2, \dots,$

$$U_1(u) = 3u + u^2,$$

$$U_{k+1}(u) = [U_k(u) - U_k(1)]u^3/(u - 1).$$

(h) $x = t^3(t - 1), y = V_k(1/t), V_1(u) = 2u^2 - u^3,$

$$V_{k+1}(u) = [V_k(u) - V_k(1)]u^4/(u - 1).$$

(i) $x = t^3(t - 1), y = W_k(1/t),$ gdzie $k = 1, 2, \dots,$

$$W_1(u) = 2u^2 + u^3,$$

$$W_{k+1}(u) = [W_k(u) - W_k(1)]u^4/(u - 1).$$

Odzworowania $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^2$

(g) $x = t^2(t - 1), y = U_k(1/t), k = 1, 2, \dots,$

$$U_1(u) = 3u + u^2,$$

$$U_{k+1}(u) = [U_k(u) - U_k(1)]u^3/(u - 1).$$

(h) $x = t^3(t - 1), y = V_k(1/t), V_1(u) = 2u^2 - u^3,$

$$V_{k+1}(u) = [V_k(u) - V_k(1)]u^4/(u - 1).$$

(i) $x = t^3(t - 1), y = W_k(1/t),$ gdzie $k = 1, 2, \dots,$

$$W_1(u) = 2u^2 + u^3,$$

$$W_{k+1}(u) = [W_k(u) - W_k(1)]u^4/(u - 1).$$

(j) $x = t + t^{-1}, y = Z(t)$ jest wielomianem spełniającym

$$y(t) + y(1/t) = (t - 1)^{2m+1}(t + 1)^{n+1}/t^{m+n+1},$$

gdzie $0 \leq m \leq n$ i $m + n > 0$.

Odzwzorowania $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^2$

$$(k) \quad x = (t - 1)^3 t^{-2}, \quad y = x^k (t - 1)(t - 4)t^{-1}, \\ k = 1, 2, \dots$$

Odzwzorowania $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^2$

$$(k) \quad x = (t - 1)^3 t^{-2}, \quad y = x^k (t - 1)(t - 4)t^{-1}, \\ k = 1, 2, \dots$$

$$(l) \quad x = (t - 1)^m t^{-pn}, \quad y = (t - 1)^k t^{-pl}, \\ ml - nk = 1, \quad p = 1, 2, \dots$$

Odzworowania $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^2$

$$(k) \quad x = (t - 1)^3 t^{-2}, \quad y = x^k (t - 1)(t - 4)t^{-1}, \\ k = 1, 2, \dots$$

$$(l) \quad x = (t - 1)^m t^{-pn}, \quad y = (t - 1)^k t^{-pl}, \\ ml - nk = 1, \quad p = 1, 2, \dots$$

$$(m) \quad x = (t - 1)^{pm} t^{-n}, \quad y = (t - 1)^{pk} t^{-l}, \\ ml - nk = 1, \quad p = 1, 2, \dots$$

Odzworowania $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^2$

$$(k) \quad x = (t - 1)^3 t^{-2}, \quad y = x^k (t - 1)(t - 4)t^{-1}, \\ k = 1, 2, \dots$$

$$(l) \quad x = (t - 1)^m t^{-pn}, \quad y = (t - 1)^k t^{-pl}, \\ ml - nk = 1, \quad p = 1, 2, \dots$$

$$(m) \quad x = (t - 1)^{pm} t^{-n}, \quad y = (t - 1)^{pk} t^{-l}, \\ ml - nk = 1, \quad p = 1, 2, \dots$$

$$(n) \quad x = (t - 1)^{2m} t^{-2n}, \quad y = (t - 1)^{2k} t^{-2l}, \\ ml - nk = 1.$$

Odzworowania $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^2$

$$(k) \quad x = (t - 1)^3 t^{-2}, \quad y = x^k (t - 1)(t - 4)t^{-1}, \\ k = 1, 2, \dots$$

$$(l) \quad x = (t - 1)^m t^{-pn}, \quad y = (t - 1)^k t^{-pl}, \\ ml - nk = 1, \quad p = 1, 2, \dots$$

$$(m) \quad x = (t - 1)^{pm} t^{-n}, \quad y = (t - 1)^{pk} t^{-l}, \\ ml - nk = 1, \quad p = 1, 2, \dots$$

$$(n) \quad x = (t - 1)^{2m} t^{-2n}, \quad y = (t - 1)^{2k} t^{-2l}, \\ ml - nk = 1.$$

$$(o) \quad x = (t - 1)^{4l} t^{1-2l}, \quad y = x^k (t - 1)^{2l} (t + 1)t^{-l}, \\ k = 0, 1, \dots, \quad l = 1, 2, 3, \dots$$

Odzworowania $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^2$

$$(k) \quad x = (t - 1)^3 t^{-2}, \quad y = x^k (t - 1)(t - 4)t^{-1}, \\ k = 1, 2, \dots$$

$$(l) \quad x = (t - 1)^m t^{-pn}, \quad y = (t - 1)^k t^{-pl}, \\ ml - nk = 1, \quad p = 1, 2, \dots$$

$$(m) \quad x = (t - 1)^{pm} t^{-n}, \quad y = (t - 1)^{pk} t^{-l}, \\ ml - nk = 1, \quad p = 1, 2, \dots$$

$$(n) \quad x = (t - 1)^{2m} t^{-2n}, \quad y = (t - 1)^{2k} t^{-2l}, \\ ml - nk = 1.$$

$$(o) \quad x = (t - 1)^{4l} t^{1-2l}, \quad y = x^k (t - 1)^{2l} (t + 1)t^{-l}, \\ k = 0, 1, \dots, \quad l = 1, 2, 3, \dots$$

$$(p) \quad x = (t - 1)^4 t^{-3}, \quad y = x^k (t - 1)^2 (t - 3)t^{-2}, \\ k = 1, 2, \dots$$

Odzworowania $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^2$

$$(q) \quad x = (t - 1)^{4m-2} t^{1-2m},$$

$$y = x^k \cdot (t - 1)^{2m-1} (t + 3) t^{-m}, \quad m = 2, 3, \dots,$$

$$k = 0, 1, \dots$$

Odzwzorowania $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned} \text{(q)} \quad x &= (t-1)^{4m-2}t^{1-2m}, \\ y &= x^k \cdot (t-1)^{2m-1}(t+3)t^{-m}, \quad m = 2, 3, \dots, \\ k &= 0, 1, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(r)} \quad x &= (t-1)^3(t + e^{i\pi/3})t^{-2}y^k, \quad y = (t-1)^6t^{-3}, \\ k &= 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Odzwzorowania $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned} \text{(q)} \quad x &= (t-1)^{4m-2} t^{1-2m}, \\ y &= x^k \cdot (t-1)^{2m-1} (t+3) t^{-m}, \quad m = 2, 3, \dots, \\ k &= 0, 1, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(r)} \quad x &= (t-1)^3 (t + e^{i\pi/3}) t^{-2} y^k, \quad y = (t-1)^6 t^{-3}, \\ k &= 0, 1, \dots \end{aligned}$$

$$\text{(s)} \quad x = t^6 + t^5 + \frac{2}{3}t^4, \quad y = t^{-6} - t^{-7} + \frac{1}{3}t^{-8}.$$

Odzworowania $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned} \text{(q)} \quad x &= (t-1)^{4m-2}t^{1-2m}, \\ y &= x^k \cdot (t-1)^{2m-1}(t+3)t^{-m}, \quad m = 2, 3, \dots, \\ k &= 0, 1, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(r)} \quad x &= (t-1)^3(t + e^{i\pi/3})t^{-2}y^k, \quad y = (t-1)^6t^{-3}, \\ k &= 0, 1, \dots \end{aligned}$$

$$\text{(s)} \quad x = t^6 + t^5 + \frac{2}{3}t^4, \quad y = t^{-6} - t^{-7} + \frac{1}{3}t^{-8}.$$

$$\begin{aligned} \text{(t)} \quad x &= (t^4 - \sqrt{2}t^3 + t^2)t^{4k}, \\ y &= (t^{-4} + \sqrt{2}t^{-5} + t^{-6})t^{-4k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Odzworowania $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^2$

- (q) $x = (t - 1)^{4m-2}t^{1-2m}$,
 $y = x^k \cdot (t - 1)^{2m-1}(t + 3)t^{-m}$, $m = 2, 3, \dots$,
 $k = 0, 1, \dots$
- (r) $x = (t - 1)^3(t + e^{i\pi/3})t^{-2}y^k$, $y = (t - 1)^6t^{-3}$,
 $k = 0, 1, \dots$
- (s) $x = t^6 + t^5 + \frac{2}{3}t^4$, $y = t^{-6} - t^{-7} + \frac{1}{3}t^{-8}$.
- (t) $x = (t^4 - \sqrt{2}t^3 + t^2)t^{4k}$,
 $y = (t^{-4} + \sqrt{2}t^{-5} + t^{-6})t^{-4k}$, $k = 0, 1, 2, \dots$
- (u) $x = (t - 1)^2(t + 2)t^{-1}$, $y = (t - 1)^4(t + \frac{1}{2})t^{-2}$.

Odzwzorowania $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned} \text{(v)} \quad x &= (t - 1)^2(t + 4 + 2\sqrt{5})t^{-1}, \\ y &= (t - 1)^4\left(t + \frac{1}{4}(11 + 5\sqrt{5})\right)t^{-2}. \end{aligned}$$

Odzworowania $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned} \text{(v)} \quad x &= (t - 1)^2(t + 4 + 2\sqrt{5})t^{-1}, \\ y &= (t - 1)^4\left(t + \frac{1}{4}(11 + 5\sqrt{5})\right)t^{-2}. \end{aligned}$$

$$\text{(w)} \quad x = (t - 1)^2(t + 2)t^{-1}, \quad y = (t - 1)^2\left(t + \frac{1}{2}\right)t^{-2}.$$

Co dalej?

- Dla krzywych wymiernych o mniejszej charakterystyce Eulera można spodziewać się ciągłych rodzin...

Co dalej?

- Dla krzywych wymiernych o mniejszej charakterystyce Eulera można spodziewać się ciągłych rodzin...
- ...oraz dodatkowo dużo więcej rachunków.

Co dalej?

- Dla krzywych wymiernych o mniejszej charakterystyce Eulera można spodziewać się ciągłych rodzin...
- ...oraz dodatkowo dużo więcej rachunków.
- Dla krzywych o genusie ≥ 1 trudno znaleźć dobre oszacowanie dla kowymiarów.

Co dalej?

- Dla krzywych wymiernych o mniejszej charakterystyce Eulera można spodziewać się ciągłych rodzin...
- ...oraz dodatkowo dużo więcej rachunków.
- Dla krzywych o genusie ≥ 1 trudno znaleźć dobre oszacowanie dla kowymiarów.
- Można próbować analizować tzw. krzywe ostrzowe (cuspidal curves) w $\mathbb{C}P^2$, ale problem jest rachunkowo beznadziejny.

Co dalej?

- Dla krzywych wymiernych o mniejszej charakterystyce Eulera można spodziewać się ciągłych rodzin...
- ...oraz dodatkowo dużo więcej rachunków.
- Dla krzywych o genusie ≥ 1 trudno znaleźć dobre oszacowanie dla kowymiarów.
- Można próbować analizować tzw. krzywe ostrzowe (cuspidal curves) w $\mathbb{C}P^2$, ale problem jest rachunkowo beznadziejny.
- Znaleźć zgrabną formułę całkową na kowymiar.

DZIEKUJĘ

ZA

UWAGĘ