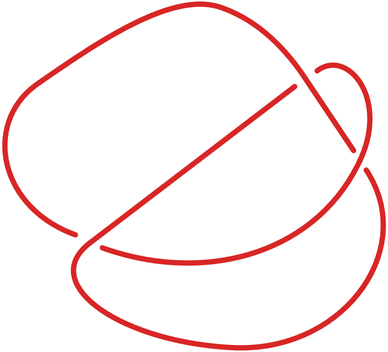
Wielomian Aleksandera

Maciej Borodzik
www.mimuw.edu.pl/~mcboro

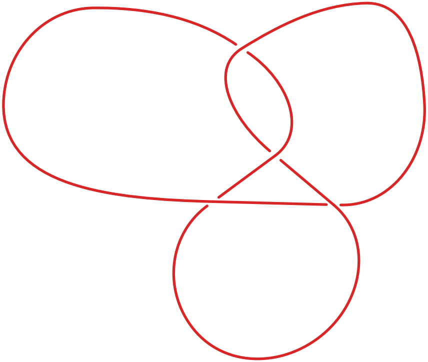
Uniwersytet Warszawski, wydział MIM

29 września 2017

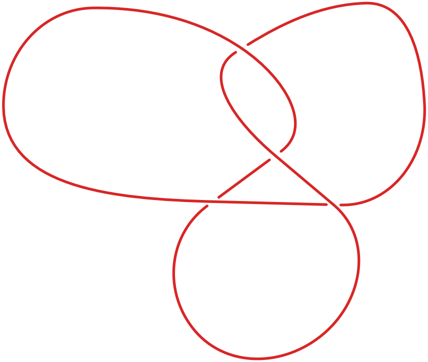
Węzły



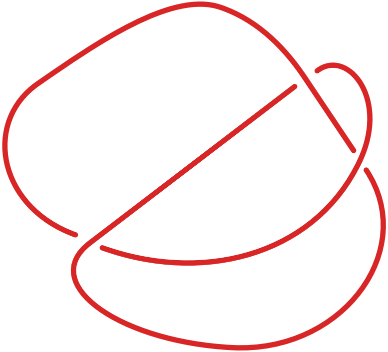
Węzły



Węzły



Węzły



Niezmienniki

Niezmiennik:

- Taki sam dla tych samych węzłów.
- Możliwie inny dla różnych.
- Łatwy do policzenia.
- Dający się zrozumieć.

Niezmienniki

Niezmiennik:

- Taki sam dla tych samych węzłów.
- Możliwie inny dla różnych.
- Łatwy do policzenia.
- Dający się zrozumieć.

Niezmienniki

Niezmiennik:

- Taki sam dla tych samych węzłów.
- Możliwie inny dla różnych.
- Łatwy do policzenia.
- Dający się zrozumieć.

Niezmienniki

Niezmiennik:

- Taki sam dla tych samych węzłów.
- Możliwie inny dla różnych.
- Łatwy do policzenia.
- Dający się zrozumieć.

Przykład z innej beczki

„Niezmiennik liczb rzeczywistych”.

Przykład z innej beczki

„Niezmiennik liczb rzeczywistych". Jej rozwinięcie do 100. miejsca po przecinku.

Przykład z innej beczki

„Niezmiennik liczb rzeczywistych”. Jej rozwinięcie do 100. miejsca po przecinku.

- Odróżnia niektóre liczby rzeczywiste.

Przykład z innej beczki

„Niezmiennik liczb rzeczywistych”. Jej rozwinięcie do 100. miejsca po przecinku.

- Odróżnia niektóre liczby rzeczywiste.
- Ale nie wszystkie.

Skrzyżowania

Na diagramie węzła mamy skrzyżowania.

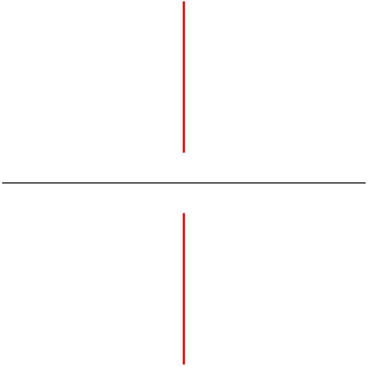
Skrzyżowania

Na diagramie węzła mamy skrzyżowania.

Skrzyżowania

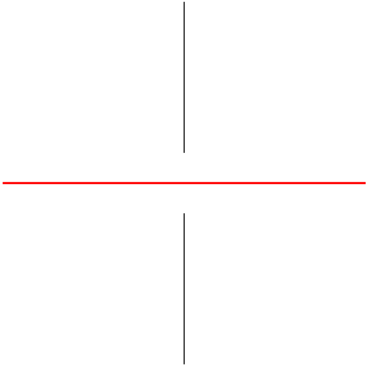
Na diagramie węzła mamy skrzyżowania.

Tunel



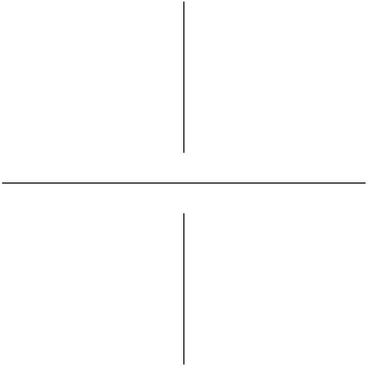
Skrzyżowania

Na diagramie węzła mamy skrzyżowania.
Most



Skrzyżowania

Na diagramie węzła mamy skrzyżowania.

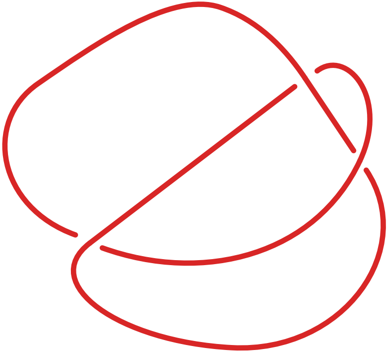


Skrzyżowania

Numerujemy skrzyżowania.

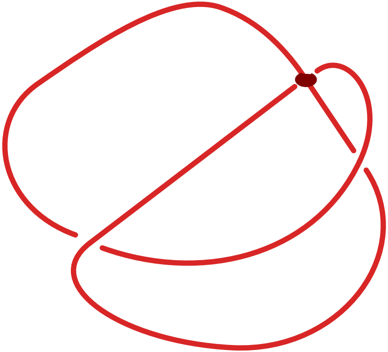
Skrzyżowania

Numerujemy skrzyżowania.



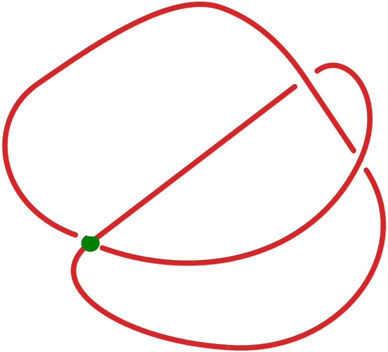
Skrzyżowania

Numerujemy skrzyżowania. Pierwsze



Skrzyżowania

Numerujemy skrzyżowania.



Skrzyżowania

Numerujemy skrzyżowania.

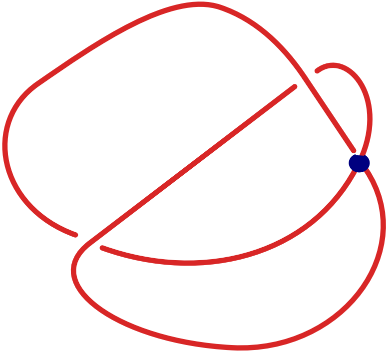


Diagram węzła i obszary

Wybierzmy następujące obszary.

Diagram węzła i obszary

Wybierzmy następujące obszary.

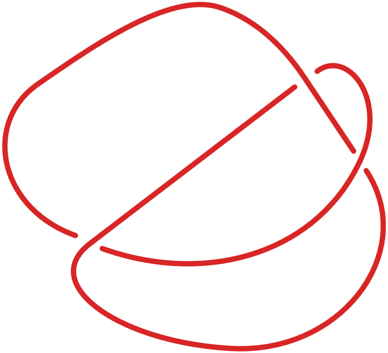


Diagram węzła i obszary

Wybierzmy następujące obszary. Pierwszy

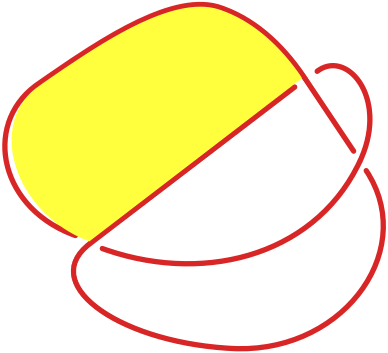


Diagram węzła i obszary

Wybierzmy następujące obszary. Drugi

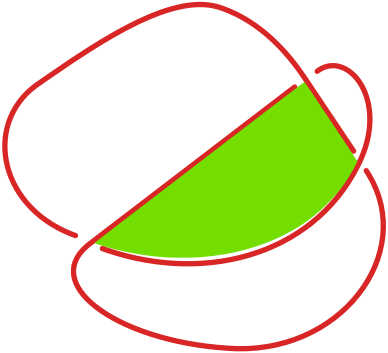
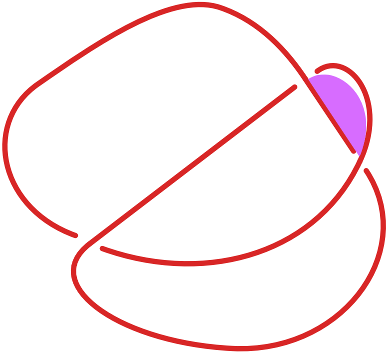


Diagram węzła i obszary

Wybierzmy następujące obszary. Trzeci



Wybierzmy następujące obszary. Czwarty

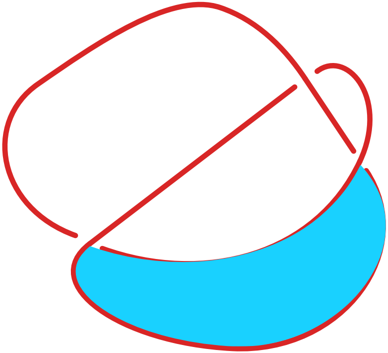


Diagram węzła i obszary

Wybierzmy następujące obszary. Piąty

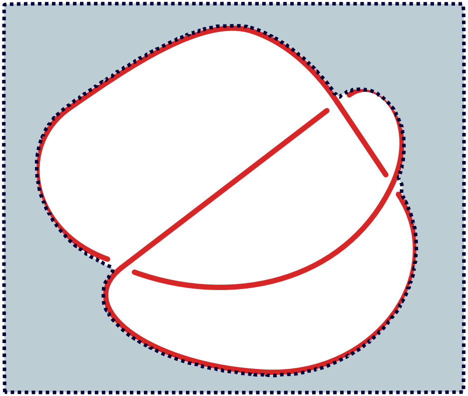
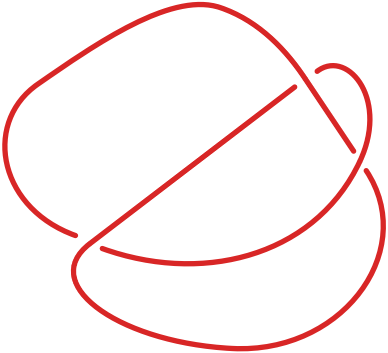


Diagram węzła i obszary

Wybierzmy następujące obszary.



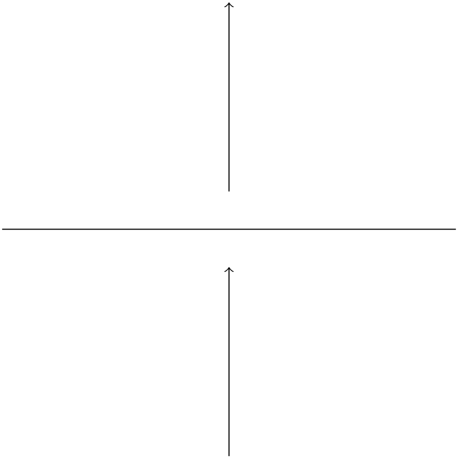
Jeśli diagram ma n skrzyżowań, to jest dokładnie n + 2 skrzyżowań.

Reguła

Dla ustalonego skrzyżowania S i regionu R definiujemy wielomian w następujący sposób.

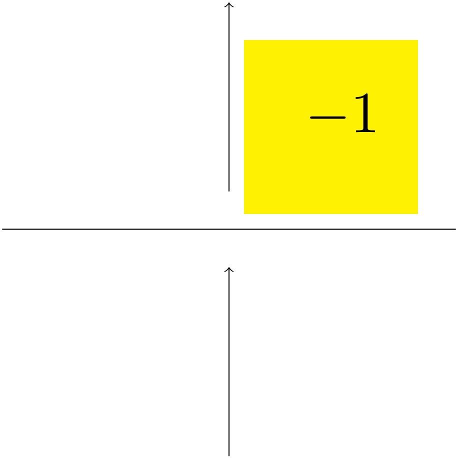
Reguła

Dla ustalonego skrzyżowania S i regionu R definiujemy wielomian w następujący sposób.



Reguła

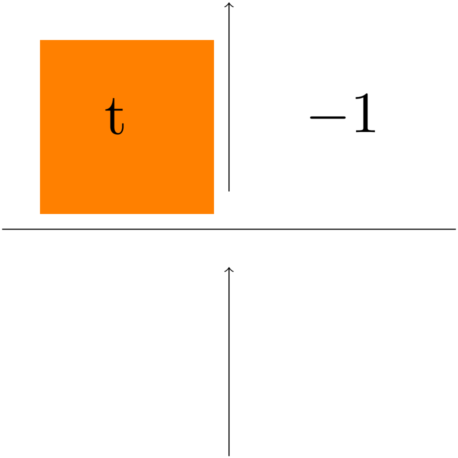
Dla ustalonego skrzyżowania S i regionu R definiujemy wielomian w następujący sposób.



- Na prawo za skrzyżowaniem.

Reguła

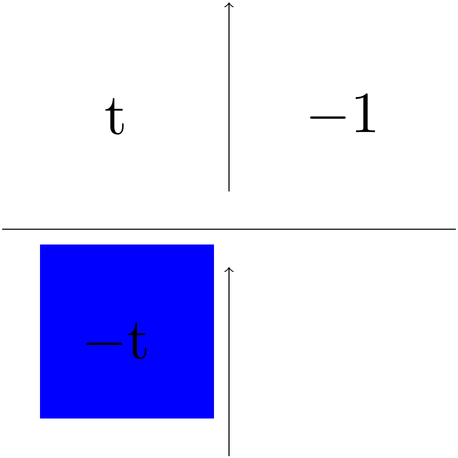
Dla ustalonego skrzyżowania S i regionu R definiujemy wielomian w następujący sposób.



- Na prawo za skrzyżowaniem.
- Na lewo za skrzyżowaniem.

Reguła

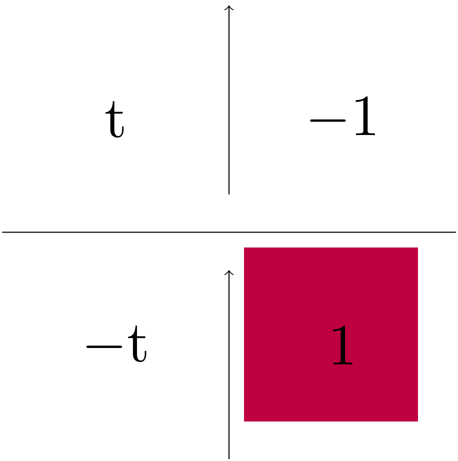
Dla ustalonego skrzyżowania S i regionu R definiujemy wielomian w następujący sposób.



- Na prawo za skrzyżowaniem.
- Na lewo za skrzyżowaniem.
- Na lewo przed skrzyżowaniem.

Reguła

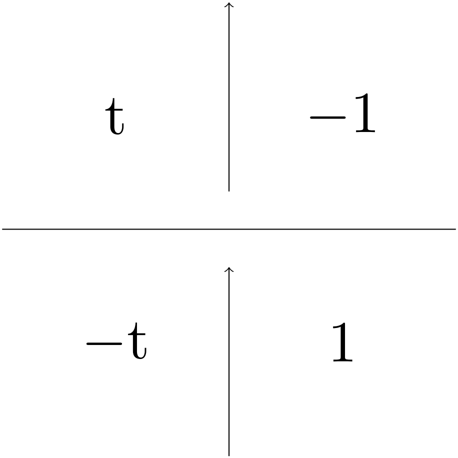
Dla ustalonego skrzyżowania S i regionu R definiujemy wielomian w następujący sposób.



- Na prawo za skrzyżowaniem.
- Na lewo za skrzyżowaniem.
- Na lewo przed skrzyżowaniem.
- Na prawo przed skzyżowaniem.

Reguła

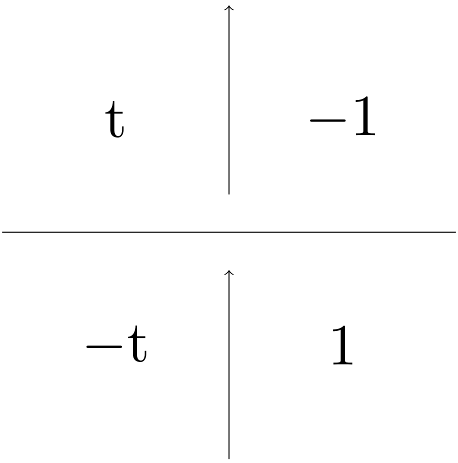
Dla ustalonego skrzyżowania S i regionu R definiujemy wielomian w następujący sposób.



- Na prawo za skrzyżowaniem.
- Na lewo za skrzyżowaniem.
- Na lewo przed skrzyżowaniem.
- Na prawo przed skzyżowaniem.
- Jeśli S nie styka się z R, definiujemy 0.

Reguła

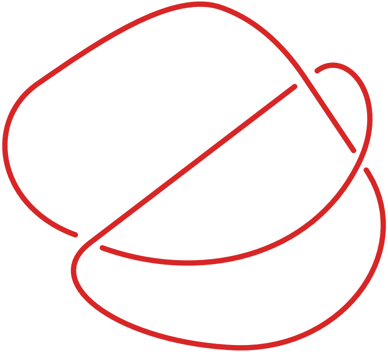
Dla ustalonego skrzyżowania S i regionu R definiujemy wielomian w następujący sposób.



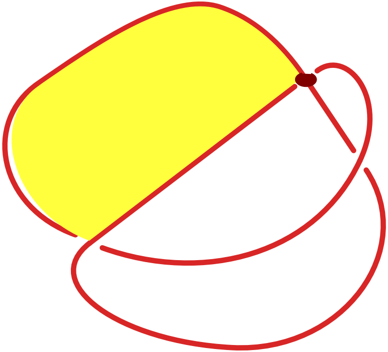
- Na prawo za skrzyżowaniem.
- Na lewo za skrzyżowaniem.
- Na lewo przed skrzyżowaniem.
- Na prawo przed skzyżowaniem.
- Jeśli S nie styka się z R, definiujemy 0.
- Jeśli styka się dwukrotnie, sumujemy wkłady.

Wyniki zapisujemy w tabeli

Wyniki zapisujemy w tabeli

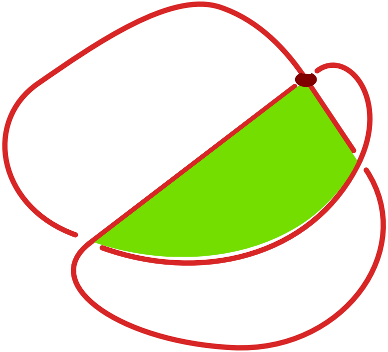


Wyniki zapisujemy w tabeli



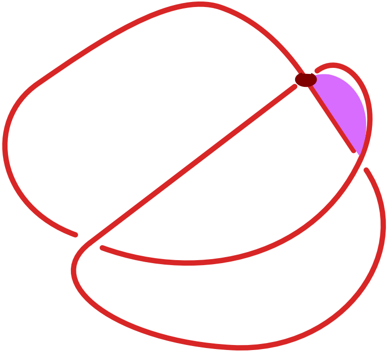
-1				

Wyniki zapisujemy w tabeli



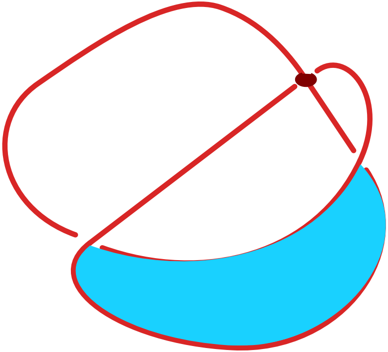
-1	t			

Wyniki zapisujemy w tabeli



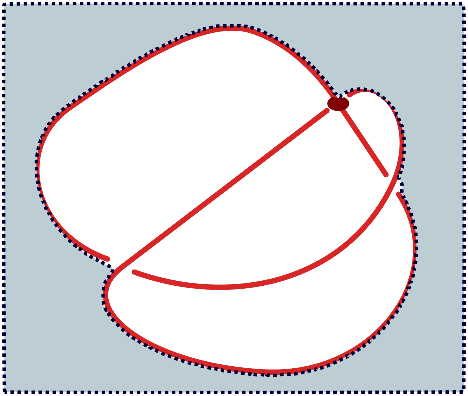
-1	t	$-$t		

Wyniki zapisujemy w tabeli



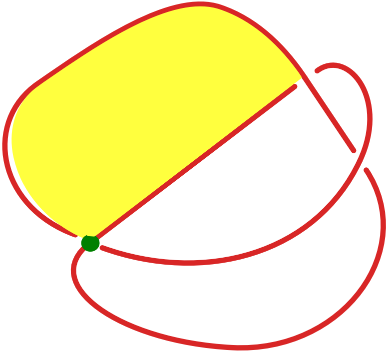
-1	t	$-t$	0	

Wyniki zapisujemy w tabeli



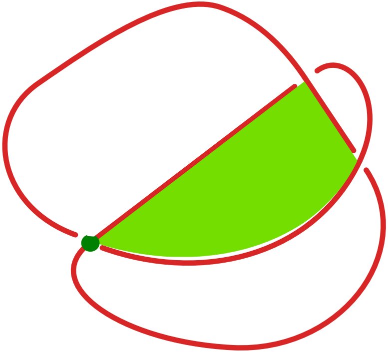
-1	t	$-t$	0	1

Wyniki zapisujemy w tabeli



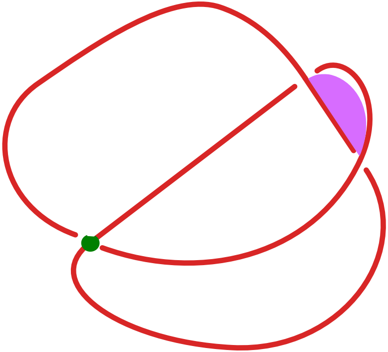
-1	t	$-$t	0	1
$-$t				

Wyniki zapisujemy w tabeli



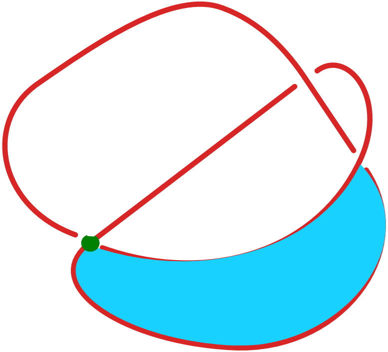
-1	t	$-$t	0	1
$-$t	t			

Wyniki zapisujemy w tabeli



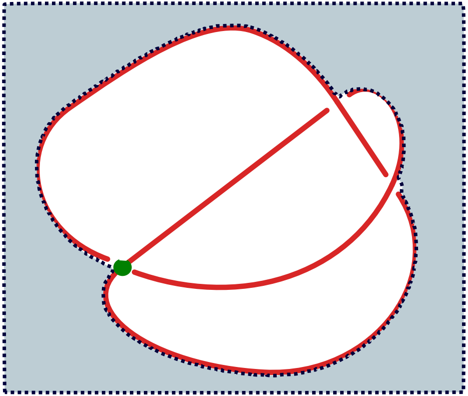
-1	t	$-$t	0	1
$-$t	t	0		

Wyniki zapisujemy w tabeli



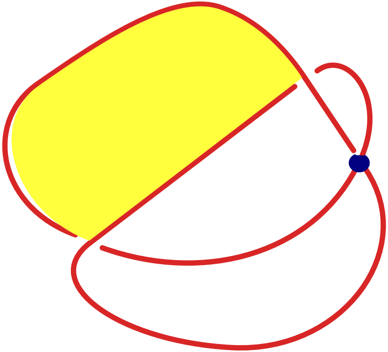
-1	t	$-t$	0	1
$-t$	t	0	-1	

Wyniki zapisujemy w tabeli



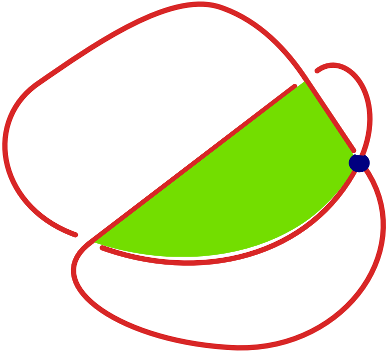
-1	t	$-$t	0	1
$-$t	t	0	-1	1

Wyniki zapisujemy w tabeli



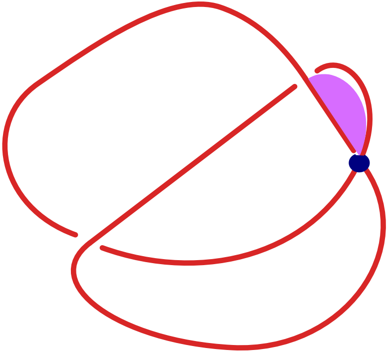
-1	t	$-$t	0	1
$-$t	t	0	-1	1
0				

Wyniki zapisujemy w tabeli



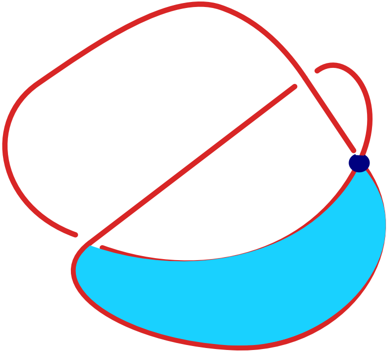
-1	t	$-$t	0	1
$-$t	t	0	-1	1
0	t			

Wyniki zapisujemy w tabeli



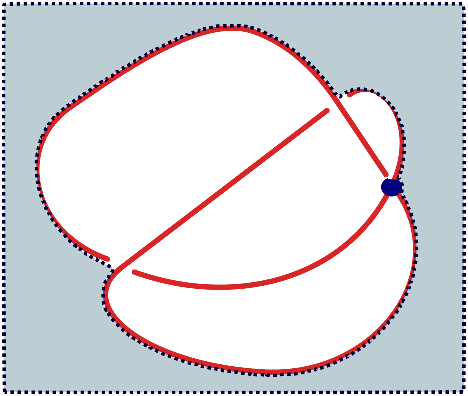
-1	t	$-$t	0	1
$-$t	t	0	-1	1
0	t	-1		

Wyniki zapisujemy w tabeli



-1	t	$-$t	0	1
$-$t	t	0	-1	1
0	t	-1	$-$t	

Wyniki zapisujemy w tabeli



-1	t	$-t$	0	1
$-t$	t	0	-1	1
0	t	-1	$-t$	1

Wyznacznik

Przypomnienie.

Macierz:

$$\begin{pmatrix} -1 & t & -t & 0 & 1 \\ -t & t & 0 & -1 & 1 \\ 0 & t & -1 & -t & 1 \end{pmatrix}$$

Wyznacznik

Przypomnienie.

Macierz:

$$\begin{pmatrix} -1 & t & -t & 0 & 1 \\ -t & t & 0 & -1 & 1 \\ 0 & t & -1 & -t & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{det} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} =$$

Wyznacznik

Przypomnienie.

$$\det \begin{pmatrix} \boxed{a} & b & c \\ d & \boxed{e} & f \\ g & h & \boxed{i} \end{pmatrix} =$$

$\boxed{aei}$

Macierz:

$$\begin{pmatrix} -1 & t & -t & 0 & 1 \\ -t & t & 0 & -1 & 1 \\ 0 & t & -1 & -t & 1 \end{pmatrix}$$

Wyznacznik

Macierz:

$$\begin{pmatrix} -1 & t & -t & 0 & 1 \\ -t & t & 0 & -1 & 1 \\ 0 & t & -1 & -t & 1 \end{pmatrix}$$

Przypomnienie.

$$\det \begin{pmatrix} a & \boxed{b} & c \\ d & e & \boxed{f} \\ \boxed{g} & h & i \end{pmatrix} =$$

$$aei + \boxed{bfg}$$

Wyznacznik

Przypomnienie.

$$\det \begin{pmatrix} a & b & \boxed{c} \\ \boxed{d} & e & f \\ g & \boxed{h} & i \end{pmatrix} =$$

$$aei + bfg + \boxed{cdh}$$

Macierz:

$$\begin{pmatrix} -1 & t & -t & 0 & 1 \\ -t & t & 0 & -1 & 1 \\ 0 & t & -1 & -t & 1 \end{pmatrix}$$

Wyznacznik

Przypomnienie.

Macierz:

$$\begin{pmatrix} -1 & t & -t & 0 & 1 \\ -t & t & 0 & -1 & 1 \\ 0 & t & -1 & -t & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} =$$

$$aei + bfg + cdh$$

$$- \ ceg$$

Wyznacznik

Przypomnienie.

Macierz:

$$\begin{pmatrix} -1 & t & -t & 0 & 1 \\ -t & t & 0 & -1 & 1 \\ 0 & t & -1 & -t & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} =$$

$$aei + bfg + cdh$$

$$- ceg - afh$$

Wyznacznik

Przypomnienie.

Macierz:

$$\begin{pmatrix} -1 & t & -t & 0 & 1 \\ -t & t & 0 & -1 & 1 \\ 0 & t & -1 & -t & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} =$$

$$aei + bfg + cdh$$

$$- ceg - afh - bdi.$$

Macierz:

$$\begin{pmatrix} -1 & t & -t & 0 & 1 \\ -t & t & 0 & -1 & 1 \\ 0 & t & -1 & -t & 1 \end{pmatrix}$$

Przypomnienie.

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \\ aei + bfg + cdh \\ - ceg - afh - bdi.$$

Nasza macierz nie jest kwadratowa!

Wykreślanie kolumn

$$\begin{pmatrix} -1 & \mathrm{t} & -\mathrm{t} & 0 & 1 \\ -\mathrm{t} & \mathrm{t} & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \mathrm{t} & -1 & -\mathrm{t} & 1 \end{pmatrix}$$

Wykreślanie kolumn

Wykreślamy dwie ostatnie.

$$\mathsf{det}\begin{pmatrix} -1 & t & -t \\ -t & t & 0 \\ 0 & t & -1 \end{pmatrix} = t^3 - t^2 + t.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & t & -t & 0 & 1 \\ -t & t & 0 & -1 & 1 \\ 0 & t & -1 & -t & 1 \end{pmatrix}$$

Wykreślanie kolumn

Wykreślamy dwie pierwsze.

$$\det\begin{pmatrix} -t & 0 & 1 \\ 0 & -t & 1 \\ -1 & -t & -1 \end{pmatrix} = -t^2 + t - 1.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & t & -t & 0 & 1 \\ -t & t & 0 & -1 & 1 \\ 0 & t & -1 & -t & 1 \end{pmatrix}$$

Wykreślanie kolumn

Wykreślamy dwie skrajne.

$$\det\begin{pmatrix} t & -t & 0 \\ t & 0 & -t \\ t & -1 & -t \end{pmatrix} = -t^3 + t^2 - t.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & t & -t & 0 & 1 \\ -t & t & 0 & -1 & 1 \\ 0 & t & -1 & -t & 1 \end{pmatrix}$$

Wykreślanie kolumn

$$\begin{pmatrix} -1 & t & -t & 0 & 1 \\ -t & t & 0 & -1 & 1 \\ 0 & t & -1 & -t & 1 \end{pmatrix}$$

- Zawsze dostajemy $\pm t^*(t^2 - t + 1)$.

Wykreślanie kolumn

$$\begin{pmatrix} -1 & t & -t & 0 & 1 \\ -t & t & 0 & -1 & 1 \\ 0 & t & -1 & -t & 1 \end{pmatrix}$$

- Zawsze dostajemy $\pm t^*(t^2 - t + 1)$.
- Wielomian Alexandera: dodatni wyraz wolny.

Wykreślanie kolumn

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ -t \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} t \\ t \\ t \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} -t \\ 0 \\ -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ -t \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

- Zawsze dostajemy $\pm t^*(t^2 - t + 1)$.
- Wielomian Alexandera: dodatni wyraz wolny.
- Co będzie jak wykreślimy pierwszą i trzecią kolumnę?

Wykreślanie kolumn

$$\begin{pmatrix} -1 & t & -t & 0 & 1 \\ -t & t & 0 & -1 & 1 \\ 0 & t & -1 & -t & 1 \end{pmatrix}$$

- Zawsze dostajemy $\pm t^*(t^2 - t + 1)$.
- Wielomian Alexandera: dodatni wyraz wolny.
- Co będzie jak wykreślimy pierwszą i trzecią kolumnę?
- Wycinamy kolumny odpowiadające przyległym obszarom.

Wielomian Aleksandera

Twierdzenie

Tak znormalizowany wielomian jest nie zależy od wyboru diagramu węzła.

Twierdzenie

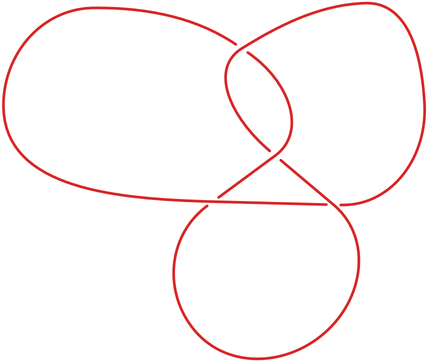
Tak znormalizowany wielomian jest nie zależy od wyboru diagramu węzła.

Definicja

Ten wielomian nazywamy wielomianem Aleksandera dla węzła.

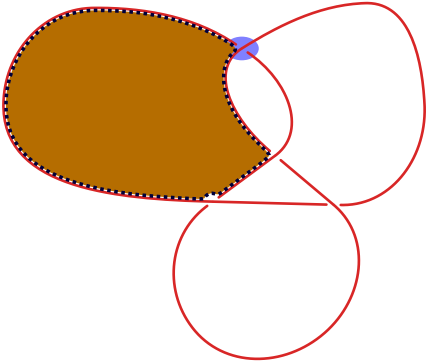
Węzeł ósemkowy

Węzeł ósemkowy



$$\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}.$$

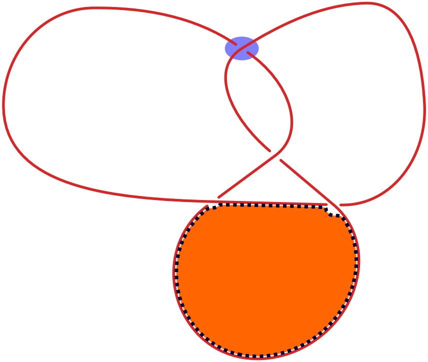
Węzeł ósemkowy



$$\begin{pmatrix} t & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

.

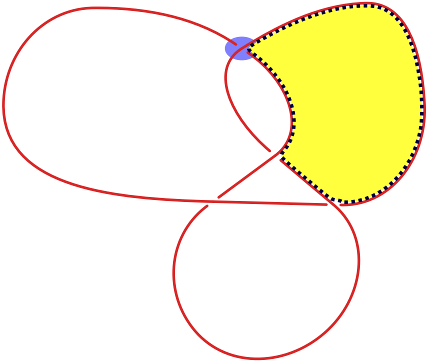
Węzeł ósemkowy



$$\begin{pmatrix} t & 0 & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{pmatrix}$$

.

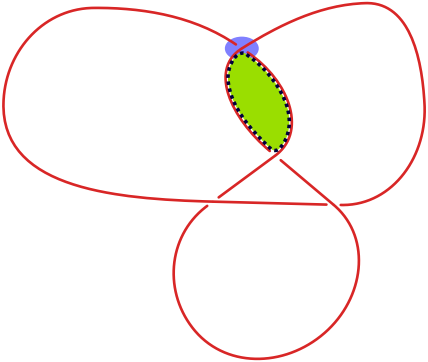
Węzeł ósemkowy



$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

.

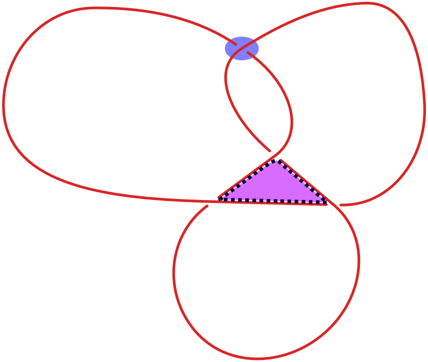
Węzeł ósemkowy



$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 & -t \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

.

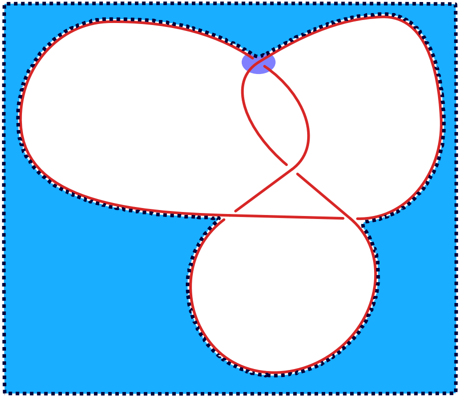
Węzeł ósemkowy



$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 & -t & 0 & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

.

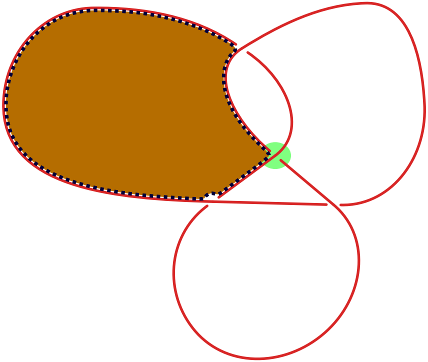
Węzeł ósemkowy



$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 & -t & 0 & -1 \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

.

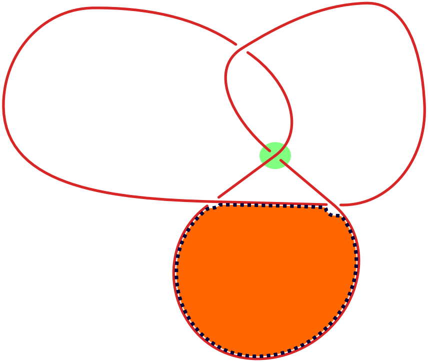
Węzeł ósemkowy



$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 & -t & 0 & -1 \\ 1 & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

.

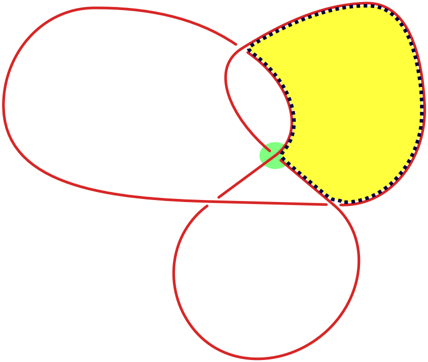
Węzeł ósemkowy



$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 & -t & 0 & -1 \\ 1 & 0 & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

.

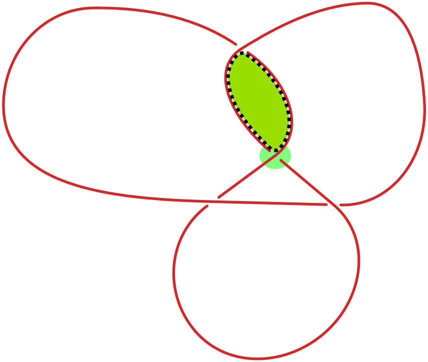
Węzeł ósemkowy



$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 & -t & 0 & -1 \\ 1 & 0 & t & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

.

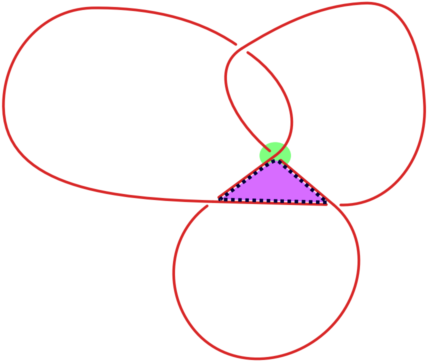
Węzeł ósemkowy



$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 & -t & 0 & -1 \\ 1 & 0 & t & -t & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

.

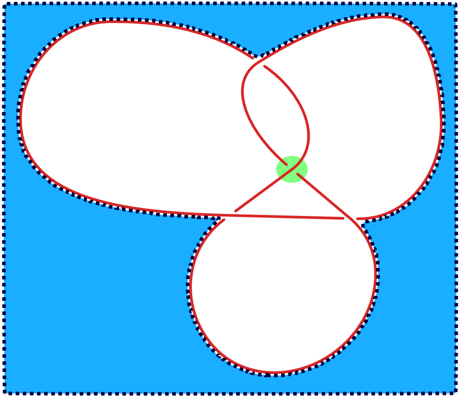
Węzeł ósemkowy



$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 & -t & 0 & -1 \\ 1 & 0 & t & -t & -1 & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

.

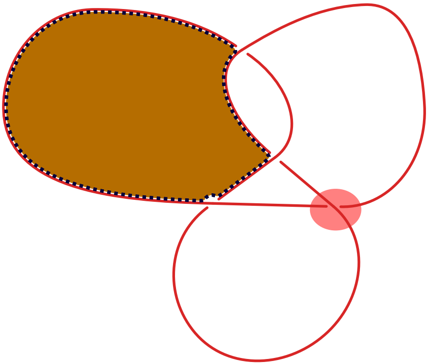
Węzeł ósemkowy



$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 & -t & 0 & -1 \\ 1 & 0 & t & -t & -1 & 0 \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

.

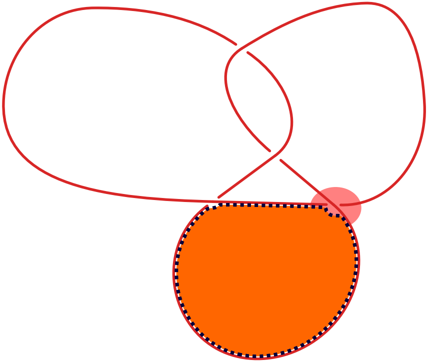
Węzeł ósemkowy



$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 & -t & 0 & -1 \\ 1 & 0 & t & -t & -1 & 0 \\ 0 & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

.

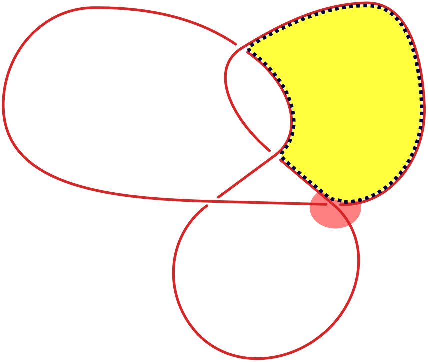
Węzeł ósemkowy



$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 & -t & 0 & -1 \\ 1 & 0 & t & -t & -1 & 0 \\ 0 & 1 & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

.

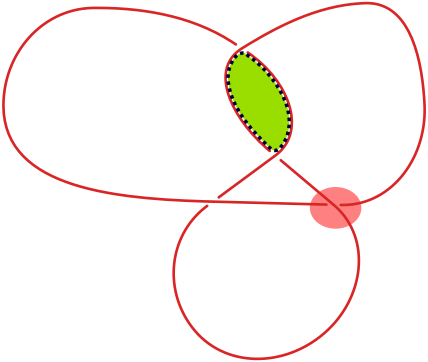
Węzeł ósemkowy



$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 & -t & 0 & -1 \\ 1 & 0 & t & -t & -1 & 0 \\ 0 & 1 & t & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

.

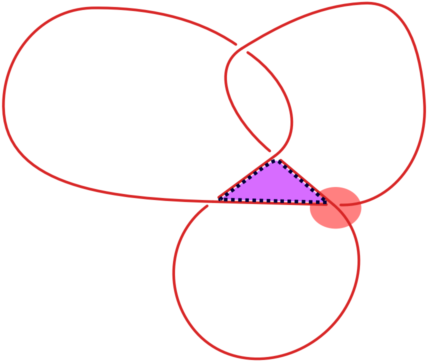
Węzeł ósemkowy



$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 & -t & 0 & -1 \\ 1 & 0 & t & -t & -1 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

.

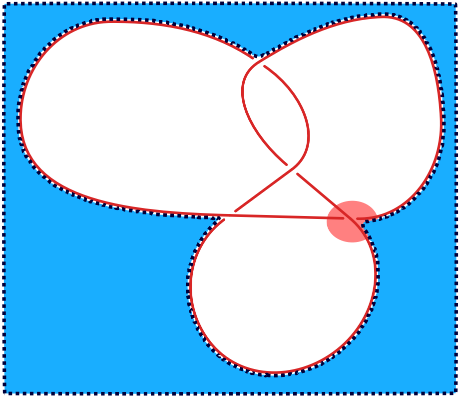
Węzeł ósemkowy



$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 & -t & 0 & -1 \\ 1 & 0 & t & -t & -1 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & -t & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

.

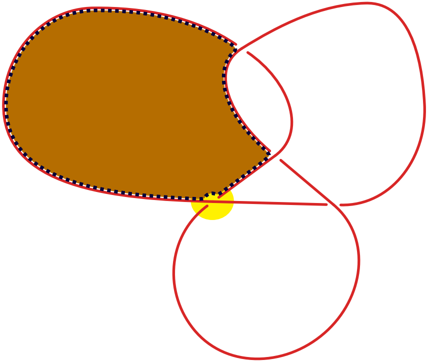
Węzeł ósemkowy



$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 & -t & 0 & -1 \\ 1 & 0 & t & -t & -1 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & -t & -1 \\ \end{pmatrix}$$

.

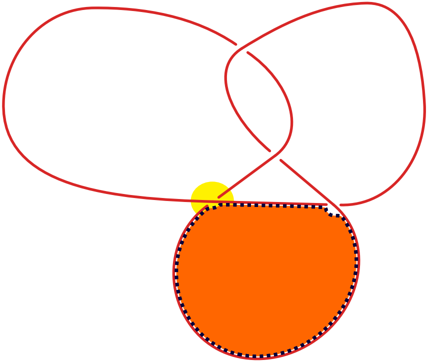
Węzeł ósemkowy



$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 & -t & 0 & -1 \\ 1 & 0 & t & -t & -1 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & -t & -1 \\ t & & & & & \end{pmatrix}$$

.

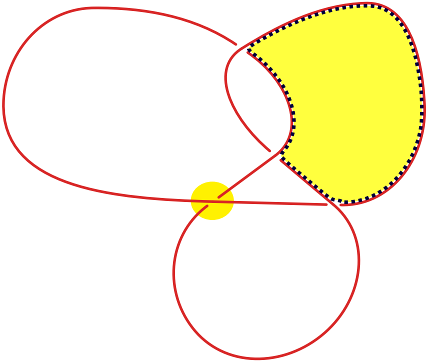
Węzeł ósemkowy



$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 & -t & 0 & -1 \\ 1 & 0 & t & -t & -1 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & -t & -1 \\ t & 1 & & & & \end{pmatrix}$$

.

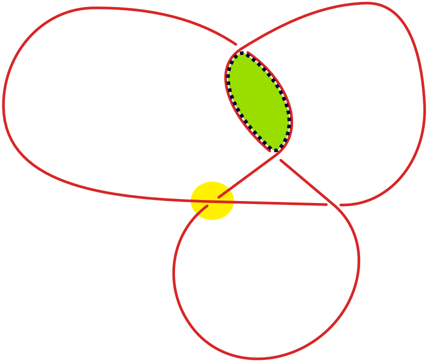
Węzeł ósemkowy



$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 & -t & 0 & -1 \\ 1 & 0 & t & -t & -1 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & -t & -1 \\ t & 1 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

.

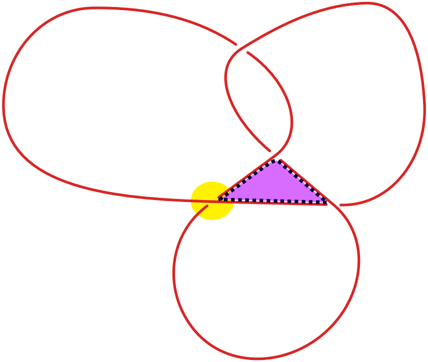
Węzeł ósemkowy



$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 & -t & 0 & -1 \\ 1 & 0 & t & -t & -1 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & -t & -1 \\ t & 1 & 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

.

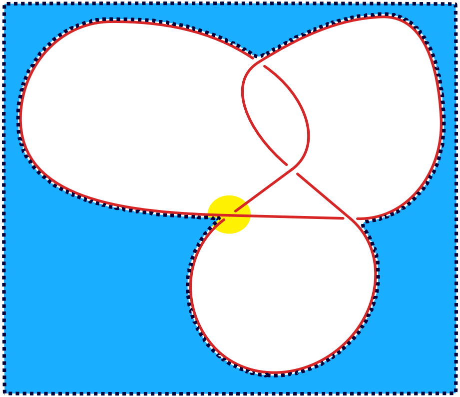
Węzeł ósemkowy



$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 & -t & 0 & -1 \\ 1 & 0 & t & -t & -1 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & -t & -1 \\ t & 1 & 0 & 0 & -1 & \end{pmatrix}$$

.

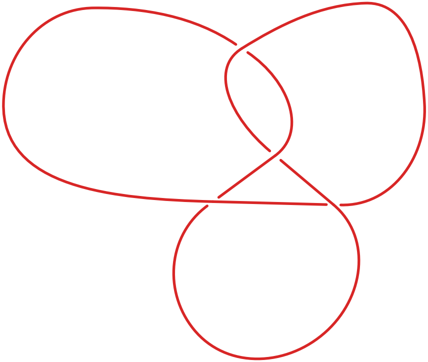
Węzeł ósemkowy



$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 & -t & 0 & -1 \\ 1 & 0 & t & -t & -1 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & -t & -1 \\ t & 1 & 0 & 0 & -1 & -t \end{pmatrix}$$

.

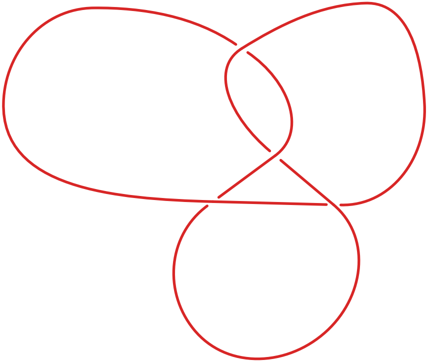
Węzeł ósemkowy



$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 & -t & 0 & -1 \\ 1 & 0 & t & -t & -1 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & -t & -1 \\ t & 1 & 0 & 0 & -1 & -t \end{pmatrix}$$

.

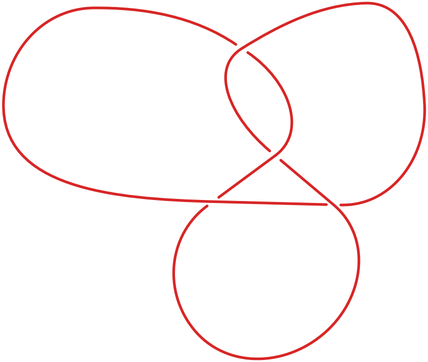
Węzeł ósemkowy



$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 & -t & 0 & -1 \\ 1 & 0 & t & -t & -1 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & -t & -1 \\ t & 1 & 0 & 0 & -1 & -t \end{pmatrix}$$

$$= t(t^2 - 3t + 1).$$

Węzeł ósemkowy



$$\det \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} t \\ 1 \\ 0 \\ t \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ t \\ t \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -t \\ -t \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ -t \\ -1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -t \end{matrix}} \end{pmatrix}$$
$$= t(t^2 - 3t + 1).$$

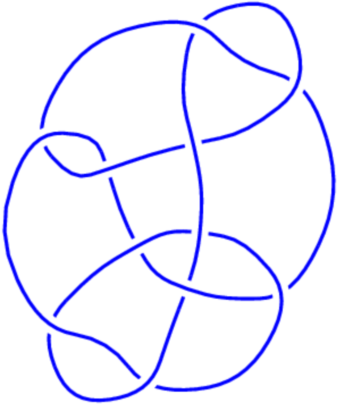
Trochę smutku na koniec

Węzeł 11n34.

Ma wielomian Aleksandera równy 1.

Trochę smutku na koniec

Węzeł 11n34.



Ma wielomian Aleksandera równy 1.

Dlaczego ważny

Niech $K \subset S^3$ węzeł. $X = S^3 \setminus K$.

Dlaczego ważny

Niech $\mathrm{K} \subset \mathrm{S}^3$ węzeł. $\mathrm{X} = \mathrm{S}^3 \setminus \mathrm{K}$.

- $\mathrm{H}_1(\mathrm{X}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Nie zależy od K.

Dlaczego ważny

Niech $K \subset S^3$ węzeł. $X = S^3 \setminus K$.

- $H_1(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Nie zależy od K.
- Z drugiej strony $\pi_1(X)$ jest (prawie) kompletnym niezmiennikiem. Odróżnia węzły.

Dlaczego ważny

Niech $K \subset S^3$ węzeł. $X = S^3 \setminus K$.

- $H_1(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Nie zależy od K.
- Z drugiej strony $\pi_1(X)$ jest (prawie) kompletnym niezmiennikiem. Odróżnia węzły.
- Ale $\pi_1(X)$ ciężko policzyć i ciężko porównywać.

Dlaczego ważny

Niech $K \subset S^3$ węzeł. $X = S^3 \setminus K$.

- $H_1(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Nie zależy od K.
- Z drugiej strony $\pi_1(X)$ jest (prawie) kompletnym niezmiennikiem. Odróżnia węzły.
- Ale $\pi_1(X)$ ciężko policzyć i ciężko porównywać.
- Wielomian Aleksandera jest pomiędzy tymi dwoma niezmiennikami.

Dlaczego ważny

Niech $K \subset S^3$ węzeł. $X = S^3 \setminus K$.

- $H_1(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Nie zależy od K.
- Z drugiej strony $\pi_1(X)$ jest (prawie) kompletnym niezmiennikiem. Odróżnia węzły.
- Ale $\pi_1(X)$ ciężko policzyć i ciężko porównywać.
- Wielomian Aleksandera jest pomiędzy tymi dwoma niezmiennikami.
- Mamy homomorfizm $\pi_1(X) \to \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)] = H_1(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Niech $\widetilde{X}$ będzie nakryciem odpowiadającym temu homomorfizmowi.

Dlaczego ważny

Niech $K \subset S^3$ węzeł. $X = S^3 \setminus K$.

- $H_1(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Nie zależy od K.
- Z drugiej strony $\pi_1(X)$ jest (prawie) kompletnym niezmiennikiem. Odróżnia węzły.
- Ale $\pi_1(X)$ ciężko policzyć i ciężko porównywać.
- Wielomian Aleksandera jest pomiędzy tymi dwoma niezmiennikami.
- Mamy homomorfizm $\pi_1(X) \to \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)] = H_1(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Niech $\widetilde{X}$ będzie nakryciem odpowiadającym temu homomorfizmowi.
- Homotopie nakrycia dobrze kontrolujemy, ale homologie nie! $M = H_1(\widetilde{X}; \mathbb{Z})$ może być różne!

Dlaczego ważny

Niech $K \subset S^3$ węzeł. $X = S^3 \setminus K$.

- $H_1(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Nie zależy od K.
- Z drugiej strony $\pi_1(X)$ jest (prawie) kompletnym niezmiennikiem. Odróżnia węzły.
- Ale $\pi_1(X)$ ciężko policzyć i ciężko porównywać.
- Wielomian Aleksandera jest pomiędzy tymi dwoma niezmiennikami.
- Mamy homomorfizm $\pi_1(X) \to \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)] = H_1(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Niech $\widetilde{X}$ będzie nakryciem odpowiadającym temu homomorfizmowi.
- Homotopie nakrycia dobrze kontrolujemy, ale homologie nie! $M = H_1(\widetilde{X}; \mathbb{Z})$ może być różne!
- Grupa transformacji nakrycia (czyli $\mathbb{Z}$) działa na M i nadaje mu strukturę $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$ modułu.

Dlaczego ważny

Niech $K \subset S^3$ węzeł. $X = S^3 \setminus K$.

- $H_1(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Nie zależy od K.
- Z drugiej strony $\pi_1(X)$ jest (prawie) kompletnym niezmiennikiem. Odróżnia węzły.
- Ale $\pi_1(X)$ ciężko policzyć i ciężko porównywać.
- Wielomian Aleksandera jest pomiędzy tymi dwoma niezmiennikami.
- Mamy homomorfizm $\pi_1(X) \to \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)] = H_1(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Niech $\widetilde{X}$ będzie nakryciem odpowiadającym temu homomorfizmowi.
- Homotopie nakrycia dobrze kontrolujemy, ale homologie nie! $M = H_1(\widetilde{X}; \mathbb{Z})$ może być różne!
- Grupa transformacji nakrycia (czyli $\mathbb{Z}$) działa na M i nadaje mu strukturę $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$ modułu.
- Wielomian Aleksandera jest rzędem M jako $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ modułu.

Inne definicje

- $\Delta = \mathsf{det}(tS - S^t)$, gdzie S jest macierzą Seiferta;

Inne definicje

- $\Delta = \mathsf{det}(tS - S^t)$, gdzie S jest macierzą Seiferta;
- Rachunek różniczkowy Foxa.

Inne definicje

- $\Delta = \mathsf{det}(tS - S^t)$, gdzie S jest macierzą Seiferta;
- Rachunek różniczkowy Foxa.
- Nakrycia abelowe.

Inne definicje

- $\Delta = \mathsf{det}(tS - S^t)$, gdzie S jest macierzą Seiferta;
- Rachunek różniczkowy Foxa.
- Nakrycia abelowe.
- Relacja skein i wielomian Conwaya.

Inne definicje

- $\Delta = \mathsf{det}(tS - S^t)$, gdzie S jest macierzą Seiferta;
- Rachunek różniczkowy Foxa.
- Nakrycia abelowe.
- Relacja skein i wielomian Conwaya.
- Torsja Reidemeistera–Turaeva.

Inne definicje

- $\Delta = \mathsf{det}(tS - S^t)$, gdzie S jest macierzą Seiferta;
- Rachunek różniczkowy Foxa.
- Nakrycia abelowe.
- Relacja skein i wielomian Conwaya.
- Torsja Reidemeistera–Turaeva.

Te definicje pozwalają uogólnić wielomian Aleksandera do skręconych wielomianów Aleksandera (ang. TAP); są to jedne z najgłębszych niezmienników w teorii węzłów.

Inne definicje

- $\Delta = \det(tS - S^t)$, gdzie S jest macierzą Seiferta;
- Rachunek różniczkowy Foxa.
- Nakrycia abelowe.
- Relacja skein i wielomian Conwaya.
- Torsja Reidemeistera–Turaeva.

Te definicje pozwalają uogólnić wielomian Aleksandera do skręconych wielomianów Aleksandera (ang. TAP); są to jedne z najgłębszych niezmienników w teorii węzłów.