Podstawa programowa z matematyki i zastosowania

Maciej Borodzik

maj 2018

Pytanie

Koń mechaniczny jest oryginalnie jednostką mocy odpowiadającą mocy konia pociągowego. Jak zmieni się ta moc, jeśli powiększymy konia L–krotnie?

Rozgrzewka

Pytanie

Koń mechaniczny jest oryginalnie jednostką mocy odpowiadającą mocy konia pociągowego. Jak zmieni się ta moc, jeśli powiększymy konia L–krotnie?

Odpowiedź 1.

□

Pytanie

Koń mechaniczny jest oryginalnie jednostką mocy odpowiadającą mocy konia pociągowego. Jak zmieni się ta moc, jeśli powiększymy konia L–krotnie?

Odpowiedź 1.

- Procesy biologiczne zamieniają energię chemiczną na mechaniczną z efektywnością około 25%.

$\square$

Pytanie

Koń mechaniczny jest oryginalnie jednostką mocy odpowiadającą mocy konia pociągowego. Jak zmieni się ta moc, jeśli powiększymy konia L*–krotnie?*

Odpowiedź 1.

- Procesy biologiczne zamieniają energię chemiczną na mechaniczną z efektywnością około 25%.
- Reszta energii to ciepło.

$\square$

Rozgrzewka

Pytanie

Koń mechaniczny jest oryginalnie jednostką mocy odpowiadającą mocy konia pociągowego. Jak zmieni się ta moc, jeśli powiększymy konia L–krotnie?

Odpowiedź 1.

- Procesy biologiczne zamieniają energię chemiczną na mechaniczną z efektywnością około 25%.
- Reszta energii to ciepło.
- Utrata ciepła jest proporcjonalna do powierzchni ciała, czyli L^2.

$\square$

Rozgrzewka

Pytanie

Koń mechaniczny jest oryginalnie jednostką mocy odpowiadającą mocy konia pociągowego. Jak zmieni się ta moc, jeśli powiększymy konia L–krotnie?

Odpowiedź 1.

- Procesy biologiczne zamieniają energię chemiczną na mechaniczną z efektywnością około 25%.
- Reszta energii to ciepło.
- Utrata ciepła jest proporcjonalna do powierzchni ciała, czyli L^2.
- Jeśli moc wzrośnie bardziej niż o L^2, to jest ryzyko przegrzania.

Rozgrzewka

Pytanie

Koń mechaniczny jest oryginalnie jednostką mocy odpowiadającą mocy konia pociągowego. Jak zmieni się ta moc, jeśli powiększymy konia L*–krotnie?*

Odpowiedź 2.

□

Rozgrzewka

Pytanie

Koń mechaniczny jest oryginalnie jednostką mocy odpowiadającą mocy konia pociągowego. Jak zmieni się ta moc, jeśli powiększymy konia L*–krotnie?*

Odpowiedź 2.

- Moc jest proporcjonalna do dostarczania tlenu.

Rozgrzewka

Pytanie

Koń mechaniczny jest oryginalnie jednostką mocy odpowiadającą mocy konia pociągowego. Jak zmieni się ta moc, jeśli powiększymy konia L*–krotnie?*

Odpowiedź 2.

- Moc jest proporcjonalna do dostarczania tlenu.
- Ilość tlenu jest proporcjonalna do powierzchni płuc, która rośnie jak L^2

$\square$

Rozgrzewka

Pytanie

Koń mechaniczny jest oryginalnie jednostką mocy odpowiadającą mocy konia pociągowego. Jak zmieni się ta moc, jeśli powiększymy konia L*–krotnie?*

Odpowiedź 3.

- Maksymalna siła skurczu mięśnia sercowego na powierzchnię przekroju nie zależy do skali.

Rozgrzewka

Pytanie

Koń mechaniczny jest oryginalnie jednostką mocy odpowiadającą mocy konia pociągowego. Jak zmieni się ta moc, jeśli powiększymy konia L–krotnie?

Odpowiedź 3.

- Maksymalna siła skurczu mięśnia sercowego na powierzchnię przekroju nie zależy do skali.
- Ciśnienie krwi nie zależy od skali.

Rozgrzewka

Pytanie

Koń mechaniczny jest oryginalnie jednostką mocy odpowiadającą mocy konia pociągowego. Jak zmieni się ta moc, jeśli powiększymy konia L–krotnie?

Odpowiedź 3.

- Maksymalna siła skurczu mięśnia sercowego na powierzchnię przekroju nie zależy do skali.
- Ciśnienie krwi nie zależy od skali.
- A zatem szybkość przepływu krwi przez aortę nie zależy od skali.

Rozgrzewka

Pytanie

Koń mechaniczny jest oryginalnie jednostką mocy odpowiadającą mocy konia pociągowego. Jak zmieni się ta moc, jeśli powiększymy konia L–krotnie?

Odpowiedź 3.

- Maksymalna siła skurczu mięśnia sercowego na powierzchnię przekroju nie zależy do skali.
- Ciśnienie krwi nie zależy od skali.
- A zatem szybkość przepływu krwi przez aortę nie zależy od skali.
- Ilość krwi przetaczanej rośnie z kwadratem przekroju aorty.

Rozgrzewka

Pytanie

Koń mechaniczny jest oryginalnie jednostką mocy odpowiadającą mocy konia pociągowego. Jak zmieni się ta moc, jeśli powiększymy konia L–krotnie?

Odpowiedź 3.

- Maksymalna siła skurczu mięśnia sercowego na powierzchnię przekroju nie zależy do skali.
- Ciśnienie krwi nie zależy od skali.
- A zatem szybkość przepływu krwi przez aortę nie zależy od skali.
- Ilość krwi przetaczanej rośnie z kwadratem przekroju aorty.
- Moc zależy od kwadratu.

□

Rozgrzewka

Pytanie

Koń mechaniczny jest oryginalnie jednostką mocy odpowiadającą mocy konia pociągowego. Jak zmieni się ta moc, jeśli powiększymy konia L*–krotnie?*

Odpowiedź 3.

- Maksymalna siła skurczu mięśnia sercowego na powierzchnię przekroju nie zależy do skali.
- Ciśnienie krwi nie zależy od skali.
- A zatem szybkość przepływu krwi przez aortę nie zależy od skali.
- Ilość krwi przetaczanej rośnie z kwadratem przekroju aorty.
- Moc zależy od kwadratu.
- Objętość serca rośnie jak L^3, więc puls będzie malał jak L^{-1}: potwierdzoe doświadczalnie.

Rozgrzewka cd.

Pytanie

Jak szybkość biegu po płaskim zależy od rozmiaru zwierzęcia?

Rozgrzewka cd.

Pytanie

Jak szybkość biegu po płaskim zależy od rozmiaru zwierzęcia?

Odpowiedź.

□

Rozgrzewka cd.

Pytanie

Jak szybkość biegu po płaskim zależy od rozmiaru zwierzęcia?

Odpowiedź.

- Opór powietrza zależy od $L^2 V^2$ (powierzchnia zwierzęcia, kwadrat prędkości).

□

Rozgrzewka cd.

Pytanie

Jak szybkość biegu po płaskim zależy od rozmiaru zwierzęcia?

Odpowiedź.

- Opór powietrza zależy od L^2V^2 (powierzchnia zwierzęcia, kwadrat prędkości).
- Moc=Siła$\times$prędkość, czyli $\sim L^2V^3$.

□

Rozgrzewka cd.

Pytanie

Jak szybkość biegu po płaskim zależy od rozmiaru zwierzęcia?

Odpowiedź.

- Opór powietrza zależy od $L^2 V^2$ (powierzchnia zwierzęcia, kwadrat prędkości).
- Moc=Siła$\times$prędkość, czyli $\sim L^2 V^3$.
- Ale moc jest też $\sim L^2$.

□

Rozgrzewka cd.

Pytanie

Jak szybkość biegu po płaskim zależy od rozmiaru zwierzęcia?

Odpowiedź.

- Opór powietrza zależy od L^2V^2 (powierzchnia zwierzęcia, kwadrat prędkości).
- Moc=Siła$\times$prędkość, czyli $\sim L^2V^3$.
- Ale moc jest też $\sim L^2$.
- Czyli prędkość nie zależy bezpośrednio od rozmiaru.

$\square$

Rozgrzewka cd.

Pytanie

Jak szybkość biegu po płaskim zależy od rozmiaru zwierzęcia?

Według strony www.speedofanimals.com:

Rozgrzewka cd.

Pytanie

Jak szybkość biegu po płaskim zależy od rozmiaru zwierzęcia?

Według strony www.speedofanimals.com:

- Żyrafa: 52km/h;

Rozgrzewka cd.

Pytanie

Jak szybkość biegu po płaskim zależy od rozmiaru zwierzęcia?

Według strony `www.speedofanimals.com`:

- Żyrafa: 52km/h;
- Kot: 48km/h;

Rozgrzewka cd.

Pytanie

Jak szybkość biegu po płaskim zależy od rozmiaru zwierzęcia?

Według strony `www.speedofanimals.com`:

- Żyrafa: 52km/h;
- Kot: 48km/h;
- Słoń: 40km/h;

Rozgrzewka cd.

Pytanie

Jak szybkość biegu po płaskim zależy od rozmiaru zwierzęcia?

Według strony `www.speedofanimals.com`:

- Żyrafa: 52km/h;
- Kot: 48km/h;
- Słoń: 40km/h;
- Koń: 88km/h.

Rozgrzewka cz. 3

Pytanie

Jak szybkość biegu pod górę zależy od rozmiaru zwierzęcia.

Rozgrzewka cz. 3

Pytanie

Jak szybkość biegu pod górę zależy od rozmiaru zwierzęcia.

Odpowiedź.

□

Rozgrzewka cz. 3

Pytanie

Jak szybkość biegu pod górę zależy od rozmiaru zwierzęcia.

Odpowiedź.

- Siła grawitacji jest proporcjonalna do L^3, moc jak $L^3 v$;

Rozgrzewka cz. 3

Pytanie

Jak szybkość biegu pod górę zależy od rozmiaru zwierzęcia.

Odpowiedź.

- Siła grawitacji jest proporcjonalna do L^3, moc jak $L^3 v$;
- Moc rośnie jak L^2;

$\square$

Rozgrzewka cz. 3

Pytanie

Jak szybkość biegu pod górę zależy od rozmiaru zwierzęcia.

Odpowiedź.

- Siła grawitacji jest proporcjonalna do L^3, moc jak $L^3 v$;
- Moc rośnie jak L^2;
- Prędkość rośnie jak L^{-1};

$\square$

Rozgrzewka cz. 3

Pytanie

Jak szybkość biegu pod górę zależy od rozmiaru zwierzęcia.

Odpowiedź.

- Siła grawitacji jest proporcjonalna do L^3, moc jak $L^3 v$;
- Moc rośnie jak L^2;
- Prędkość rośnie jak L^{-1};
- Istotnie, pies wbiega na górę, pod którą koń tylko wchodzi.

$\square$

Skoki

Pytanie

Jak wysokość skoku zależy od rozmiaru zwierzęcia.

Skoki

Pytanie

Jak wysokość skoku zależy od rozmiaru zwierzęcia.

Odpowiedź.

$\square$

Skoki

Pytanie

Jak wysokość skoku zależy od rozmiaru zwierzęcia.

Odpowiedź.

- Siła kończyny jest zależna od przekroju, czyli L^2.

Skoki

Pytanie

Jak wysokość skoku zależy od rozmiaru zwierzęcia.

Odpowiedź.

- Siła kończyny jest zależna od przekroju, czyli L^2.
- Praca jaką wykonuje to siła razy długość, czyli L^3.

Skoki

Pytanie

Jak wysokość skoku zależy od rozmiaru zwierzęcia.

Odpowiedź.

- Siła kończyny jest zależna od przekroju, czyli L^2.
- Praca jaką wykonuje to siła razy długość, czyli L^3.
- Aby wznieść się na wysokość h, potrzeba pracy mgh, a masa jest jak L^3.

□

Skoki

Pytanie

Jak wysokość skoku zależy od rozmiaru zwierzęcia.

Odpowiedź.

- Siła kończyny jest zależna od przekroju, czyli L^2.
- Praca jaką wykonuje to siła razy długość, czyli L^3.
- Aby wznieść się na wysokość h, potrzeba pracy mgh, a masa jest jak L^3.
- Maksymalny wyskok nie zależy bezpośrednio od rozmiarów.

□

Źródła

- V. I. Arnold, „Modele matematyczne mechaniki klasycznej”.
- J. M. Smith, „Mathematical Ideas in Biology”.

Wielkość domu

Zadanie

Wieżowiec ma N pięter i jedną windę. Na każdym piętrze mieszka k osób z których każda raz dziennie jedzie windą na parter. Dla uproszczenia zakładamy, że winda bierze jedną osobę na raz. Zakładając, że wysokość piętra wynosi $4m$, oblicz minimalną prędkość windy.

Wielkość domu

Zadanie

Wieżowiec ma N pięter i jedną windę. Na każdym piętrze mieszka k osób z których każda raz dziennie jedzie windą na parter. Dla uproszczenia zakładamy, że winda bierze jedną osobę na raz. Zakładając, że wysokość piętra wynosi $4m$, oblicz minimalną prędkość windy.

Rozwiązanie.

Liczymy „osobometry". Z pierwszego piętra jest $2 \cdot 4 \cdot k = 8k$ osobometrów. Z drugiego $16k$, z trzeciego $24k$ i tak dalej.

□

Wielkość domu

Zadanie

Wieżowiec ma N pięter i jedną windę. Na każdym piętrze mieszka k osób z których każda raz dziennie jedzie windą na parter. Dla uproszczenia zakładamy, że winda bierze jedną osobę na raz. Zakładając, że wysokość piętra wynosi $4m$, oblicz minimalną prędkość windy.

Rozwiązanie.

Liczymy „osobometry". Z pierwszego piętra jest $2 \cdot 4 \cdot k = 8k$ osobometrów. Z drugiego $16k$, z trzeciego $24k$ i tak dalej. Łącznie mamy $4kN(N+1)$ osobometrów.

□

Wielkość domu

Zadanie

Wieżowiec ma N pięter i jedną windę. Na każdym piętrze mieszka k osób z których każda raz dziennie jedzie windą na parter. Dla uproszczenia zakładamy, że winda bierze jedną osobę na raz. Zakładając, że wysokość piętra wynosi $4m$, oblicz minimalną prędkość windy.

Rozwiązanie.

Liczymy „osobometry”. Z pierwszego piętra jest $2 \cdot 4 \cdot k = 8k$ osobometrów. Z drugiego $16k$, z trzeciego $24k$ i tak dalej. Łącznie mamy $4kN(N+1)$ osobometrów. Doba ma 86400 sekund, więc minimalna prędkość windy to $\frac{kN(N+1)}{21600}$ metrów na sekundę.

□

Wielkość domu

Zadanie

Wieżowiec ma N pięter i jedną windę. Na każdym piętrze mieszka k osób z których każda raz dziennie jedzie windą na parter. Dla uproszczenia zakładamy, że winda bierze jedną osobę na raz. Zakładając, że wysokość piętra wynosi $4m$, oblicz minimalną prędkość windy.

Rozwiązanie.

Liczymy „osobometry”. Z pierwszego piętra jest $2 \cdot 4 \cdot k = 8k$ osobometrów. Z drugiego $16k$, z trzeciego $24k$ i tak dalej. Łącznie mamy $4kN(N+1)$ osobometrów. Doba ma 86400 sekund, więc minimalna prędkość windy to $\frac{kN(N+1)}{21600}$ metrów na sekundę. Jeśli wieżowiec ma 100 pięter i 20 osób na każdym piętrze używa windy, dostajemy prędkość około $10m/s$ przy założeniu, że część osób korzysta z windy w nocy.

□

Wielkość domu

Zadanie

Wieżowiec ma N pięter i jedną windę. Na każdym piętrze mieszka k osób z których każda raz dziennie jedzie windą na parter. Dla uproszczenia zakładamy, że winda bierze jedną osobę na raz. Zakładając, że wysokość piętra wynosi $4m$, oblicz minimalną prędkość windy.

Rozwiązanie.

Liczymy „osobometry". Z pierwszego piętra jest $2 \cdot 4 \cdot k = 8k$ osobometrów. Z drugiego $16k$, z trzeciego $24k$ i tak dalej. Łącznie mamy $4kN(N+1)$ osobometrów. Doba ma 86400 sekund, więc minimalna prędkość windy to $\frac{kN(N+1)}{21600}$ metrów na sekundę. Jeśli wieżowiec ma 100 pięter i 20 osób na każdym piętrze używa windy, dostajemy prędkość około $10m/s$ przy założeniu, że część osób korzysta z windy w nocy. To jest maksymalna prędkość (przynajmniej w dół) jaką może znieść człowiek w windzie bez efektów ubocznych. □

Wielkość domu

Zadanie

Wieżowiec ma N pięter i jedną windę. Na każdym piętrze mieszka k osób z których każda raz dziennie jedzie windą na parter. Dla uproszczenia zakładamy, że winda bierze jedną osobę na raz. Zakładając, że wysokość piętra wynosi $4m$, oblicz minimalną prędkość windy.

Rozwiązanie.

Liczymy „osobometry”. Z pierwszego piętra jest $2 \cdot 4 \cdot k = 8k$ osobometrów. Z drugiego $16k$, z trzeciego $24k$ i tak dalej. Łącznie mamy $4kN(N+1)$ osobometrów. Doba ma 86400 sekund, więc minimalna prędkość windy to $\frac{kN(N+1)}{21600}$ metrów na sekundę. Jeśli wieżowiec ma 100 pięter i 20 osób na każdym piętrze używa windy, dostajemy prędkość około $10m/s$ przy założeniu, że część osób korzysta z windy w nocy. To jest maksymalna prędkość (przynajmniej w dół) jaką może znieść człowiek w windzie bez efektów ubocznych. Ograniczenie wysokości budynków. $\square$

Modelowanie ogólnie

- Modele matematyczne są trudne.

Modelowanie ogólnie

- Modele matematyczne są trudne.
- Zrozumienie modelu jest łatwe.

Modelowanie ogólnie

- Modele matematyczne są trudne.
- Zrozumienie modelu jest łatwe.
- Stworzenie modelu wymaga dużych umiejętności.

Modelowanie ogólnie

- Modele matematyczne są trudne.
- Zrozumienie modelu jest łatwe.
- Stworzenie modelu wymaga dużych umiejętności.
- W wielu wypadkach nauka modelowania wymusza powielanie schematów.

Modelowanie ogólnie

- Modele matematyczne są trudne.
- Zrozumienie modelu jest łatwe.
- Stworzenie modelu wymaga dużych umiejętności.
- W wielu wypadkach nauka modelowania wymusza powielanie schematów.
- Przykład: olbrzymie trudności z fizyką. Nawet jeśli nie ma dużego aparatu.

Cena oranżady

Zadanie

We wsi Pcim są dwa sklepy spożywcze, które sprzedają oranżadę. Miejscowi kupują oranżadę 4000 razy miesięcznie, przyjezdni kupują 6000 razy kupują ją przyjezdni. Orażnada w sklepie może kosztować 2, 4 albo 5 PLN za butelkę, bo lokalne prawo ograniczna wybór ceny.

- *Miejscowi zawsze pójdą tam, gdzie taniej, jak cena jest ta sama to podzielą się po połowie.*
- *Przyjezdni idą w połowie do jednego sklepu, w połowie do drugiego.*

Zakładamy, że cały przychód ze sprzedaży jest zyskiem, a właściciele kierują się zasadą maksymalnego zysku. Ile kosztuje oranżada w każdym ze sklepów?

Tabelka

Robimy tabelkę opisującą zysk właściciela pierwszego sklepu, w zależności od cen.

	2 PLN	4 PLN	5 PLN
2 PLN			
4 PLN			
5 PLN			

Tabelka

Robimy tabelkę opisującą zysk właściciela pierwszego sklepu, w zależności od cen.

	2 PLN	4 PLN	5 PLN
2 PLN	10		
4 PLN			
5 PLN			

Tabelka

Robimy tabelkę opisującą zysk właściciela pierwszego sklepu, w zależności od cen.

	2 PLN	4 PLN	5 PLN
2 PLN	10	14	
4 PLN			
5 PLN			

Tabelka

Robimy tabelkę opisującą zysk właściciela pierwszego sklepu, w zależności od cen.

	2 PLN	4 PLN	5 PLN
2 PLN	10	14	14
4 PLN			
5 PLN			

Tabelka

Robimy tabelkę opisującą zysk właściciela pierwszego sklepu, w zależności od cen.

	2 PLN	4 PLN	5 PLN
2 PLN	10	14	14
4 PLN	12		
5 PLN			

Tabelka

Robimy tabelkę opisującą zysk właściciela pierwszego sklepu, w zależności od cen.

	2 PLN	4 PLN	5 PLN
2 PLN	10	14	14
4 PLN	12	20	
5 PLN			

Tabelka

Robimy tabelkę opisującą zysk właściciela pierwszego sklepu, w zależności od cen.

	2 PLN	4 PLN	5 PLN
2 PLN	10	14	14
4 PLN	12	20	28
5 PLN			

Tabelka

Robimy tabelkę opisującą zysk właściciela pierwszego sklepu, w zależności od cen.

	2 PLN	4 PLN	5 PLN
2 PLN	10	14	14
4 PLN	12	20	28
5 PLN	15		

Tabelka

Robimy tabelkę opisującą zysk właściciela pierwszego sklepu, w zależności od cen.

	2 PLN	4 PLN	5 PLN
2 PLN	10	14	14
4 PLN	12	20	28
5 PLN	15	15	

Tabelka

Robimy tabelkę opisującą zysk właściciela pierwszego sklepu, w zależności od cen.

	2 PLN	4 PLN	5 PLN
2 PLN	10	14	14
4 PLN	12	20	28
5 PLN	15	15	25

Tabelka

Robimy tabelkę opisującą zysk właściciela pierwszego sklepu, w zależności od cen.

	2 PLN	4 PLN	5 PLN
2 PLN	10	14	14
4 PLN	12	20	28
5 PLN	15	15	25

Właściciel myśli sobie, że zawsze wybór sprzedaży za 4 PLN jest lepszy niż wybór sprzedaży po 2 PLN.

Tabelka

Robimy tabelkę opisującą zysk właściciela pierwszego sklepu, w zależności od cen.

	2 PLN	4 PLN	5 PLN
2 PLN	10	14	14
4 PLN	12	20	28
5 PLN	15	15	25

Właściciel myśli sobie, że zawsze wybór sprzedaży za 4 PLN jest lepszy niż wybór sprzedaży po 2 PLN. Nie będzie sprzedawał za 2 PLN.

Ograniczona tabelka

Właściciel drugiego sklepu też nie będzie sprzedawał za 2 PLN. Dostajemy tabelkę możliwości.

	4 PLN	5 PLN
4 PLN	20	28
5 PLN	15	25

Ograniczona tabelka

Właściciel drugiego sklepu też nie będzie sprzedawał za 2 PLN. Dostajemy tabelkę możliwości.

	4 PLN	5 PLN
4 PLN	20	28
5 PLN	15	25

Teraz widać, że sprzedaż za 4 PLN daje większy zysk niż za 5 PLN, niezależnie od tego, co zrobi drugi właściciel.

Ograniczona tabelka

Właściciel drugiego sklepu też nie będzie sprzedawał za 2 PLN. Dostajemy tabelkę możliwości.

	4 PLN	5 PLN
4 PLN	20	28
5 PLN	15	25

Teraz widać, że sprzedaż za 4 PLN daje większy zysk niż za 5 PLN, niezależnie od tego, co zrobi drugi właściciel.

Odpowiedź.

Oranżada kosztuje 4 PLN w każdym ze sklepów. □

Ograniczona tabelka

Właściciel drugiego sklepu też nie będzie sprzedawał za 2 PLN. Dostajemy tabelkę możliwości.

	4 PLN	5 PLN
4 PLN	20	28
5 PLN	15	25

Teraz widać, że sprzedaż za 4 PLN daje większy zysk niż za 5 PLN, niezależnie od tego, co zrobi drugi właściciel.

Odpowiedź.

Oranżada kosztuje 4 PLN w każdym ze sklepów. □

E. Prisner, *Game theory through examples.*

Procenty. Złośliwe zadanie.

Zadanie

Ile wody należy dodać do 100g czystego kwasu siarkowego, aby uzyskać roztwór o stężeniu 90%?

Procenty. Złośliwe zadanie.

Zadanie

Ile wody należy dodać do $100g$ czystego kwasu siarkowego, aby uzyskać roztwór o stężeniu 90%?

Oczywiście $11.1g$.

Procenty. Złośliwe zadanie.

Zadanie

Ile wody należy dodać do 100g *czystego kwasu siarkowego, aby uzyskać roztwór o stężeniu* 90%*?*

Zadanie

W 90g *czystego kwasu siarkowego* H_2SO_4 *rozpuszczono* 10g *trójtlenku siarki* SO_3*. Z jaką ilością wody należy zmieszać ów roztwór, aby uzyskać* 90% *wodny roztwór kwasu siarkowego?*

Zadanie

Ile wody należy dodać do $100g$ *czystego kwasu siarkowego, aby uzyskać roztwór o stężeniu* 90%*?*

Zadanie

W $90g$ *czystego kwasu siarkowego* H_2SO_4 *rozpuszczono* $10g$ *trójtlenku siarki* SO_3*. Z jaką ilością wody należy zmieszać ów roztwór, aby uzyskać* 90% *wodny roztwór kwasu siarkowego?*

1 mol ($(1+1+16)g$) wody reaguje z 1 molem ($32+3*16=80g$) trójtlenku siarki, tworząc 1 mol kwasu siarkowego. Tak więc po dodaniu $10\frac{16}{80}=2g$ wody cały trójtlenek siarki przereaguje do kwasu siarkowego. A zatem dostaniemy $102g$ czystego kwasu siarkowego. Aby uzyskać roztwór 90% potrzeba jeszcze $1/9$ wielkości roztworu. Czyli $11.3g$.

Procenty. Złośliwe zadanie.

Zadanie

Ile wody należy dodać do $100g$ czystego kwasu siarkowego, aby uzyskać roztwór o stężeniu 90%?

Zadanie

W $90g$ czystego kwasu siarkowego H_2SO_4 rozpuszczono $10g$ trójtlenku siarki SO_3. Z jaką ilością wody należy zmieszać ów roztwór, aby uzyskać 90% wodny roztwór kwasu siarkowego?

1 mol ($(1+1+16)g$) wody reaguje z 1 molem ($32+3*16=80g$) trójtlenku siarki, tworząc 1 mol kwasu siarkowego. Tak więc po dodaniu $10\frac{16}{80}=2g$ wody cały trójtlenek siarki przereaguje do kwasu siarkowego. A zatem dostaniemy $102g$ czystego kwasu siarkowego. Aby uzyskać roztwór 90% potrzeba jeszcze $1/9$ wielkości roztworu. Czyli $11.3g$. Odpowiedź: $13.3g$.

Procenty. Złośliwe zadanie.

Zadanie

Ile wody należy dodać do $100g$ czystego kwasu siarkowego, aby uzyskać roztwór o stężeniu 90%?

Zadanie

W $90g$ czystego kwasu siarkowego H_2SO_4 rozpuszczono $10g$ trójtlenku siarki SO_3. Z jaką ilością wody należy zmieszać ów roztwór, aby uzyskać 90% wodny roztwór kwasu siarkowego?

1 mol ($(1+1+16)g$) wody reaguje z 1 molem ($32+3*16=80g$) trójtlenku siarki, tworząc 1 mol kwasu siarkowego. Tak więc po dodaniu $10\frac{16}{80}=2g$ wody cały trójtlenek siarki przereaguje do kwasu siarkowego. A zatem dostaniemy $102g$ czystego kwasu siarkowego. Aby uzyskać roztwór 90% potrzeba jeszcze $1/9$ wielkości roztworu. Czyli $11.3g$. Ten roztwór z zadania można traktować jako roztwór kwasu siarkowego o stężeniu około 102%. Ale nie mówmy tego uczniom.

Równania i kalorie.

Zadanie

Po powrocie z wakacji Alek ma w domu tylko ser biały tłusty, groch i gorzkie migdały. Zawartość białka, tłuszczu i węglowodanów w 100g każdego z tych produktów prezentuje tabela. Pomóż Alkowi skomponować posiłek, który będzie miał 40g białka, 20g tłuszczu i 30g węglowodanów.

	Białko	*Tłuszcz*	*Węglowodany*
Ser	17.9	9.2	*brak*
Groch	23.6	*brak*	60.2
Migdały	20.0	52.0	7.6

Równania i kalorie.

Zadanie

Po powrocie z wakacji Alek ma w domu tylko ser biały tłusty, groch i gorzkie migdały. Zawartość białka, tłuszczu i węglowodanów w 100g każdego z tych produktów prezentuje tabela. Pomóż Alkowi skomponować posiłek, który będzie miał 40g białka, 20g tłuszczu i 30g węglowodanów.

	Białko	*Tłuszcz*	*Węglowodany*
Ser	17.9	9.2	*brak*
Groch	23.6	*brak*	60.2
Migdały	20.0	52.0	7.6

To zadanie prowadzi do układu trzech równań. Można je uprościć do dwóch parametrów, albo rozwiązać metodą prób i błędów (jest to pełnoprawna metoda rozwiązywania w szkole podstawowej).

Widoczność latarni morskiej

Zadanie

Latarnia morska ma wysokość H *nad poziomem morza. Obserwator znajduje się na wysokości* h *nad poziomem morza. Przyjmując, że promień ziemi wynosi* $R = 6300km$ *wyznacz maksymalną widzialność latarni morskiej.*

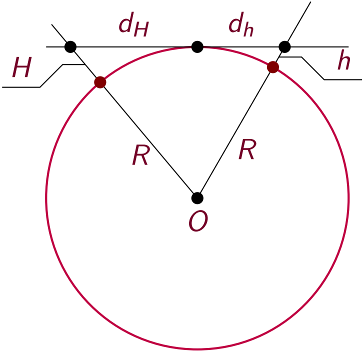
Widoczność latarni morskiej

Zadanie

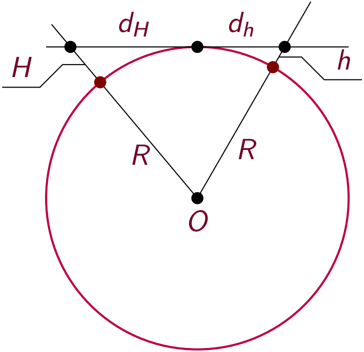
Latarnia morska ma wysokość H nad poziomem morza. Obserwator znajduje się na wysokości h nad poziomem morza. Przyjmując, że promień ziemi wynosi $R = 6300 km$ wyznacz maksymalną widzialność latarni morskiej.

Zadanie prowadzi do wzoru $d[Mm] \sim 2(\sqrt{H} + \sqrt{h})$, gdzie wysokości H i h są podane w metrach. Wzór jest powszechnie używany w nawigacji morskiej.

Rozwiązanie

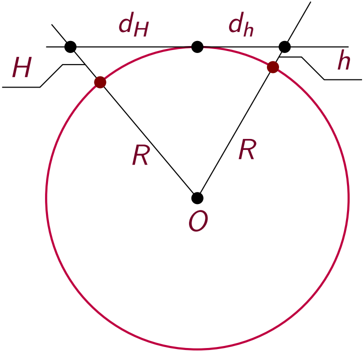


Rozwiązanie



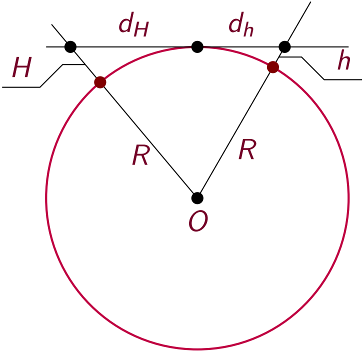
- $(R+H)^2 = R^2 + d_H^2$;

Rozwiązanie



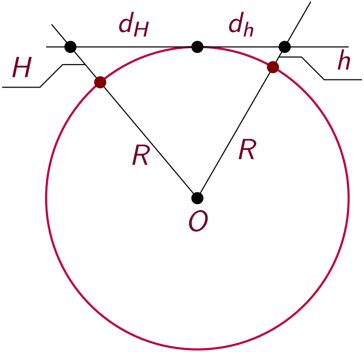
- $(R+H)^2 = R^2 + d_H^2$;
- $d_H = \sqrt{2RH + H^2}$;

Rozwiązanie



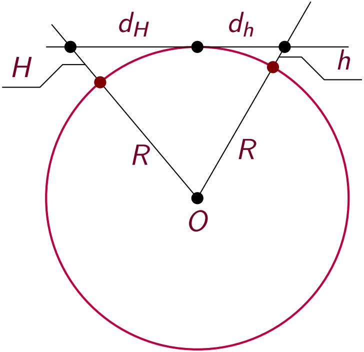
- $(R+H)^2 = R^2 + d_H^2$;
- $d_H = \sqrt{2RH + H^2}$;
- $d_h = \sqrt{2Rh + h^2}$;

Rozwiązanie



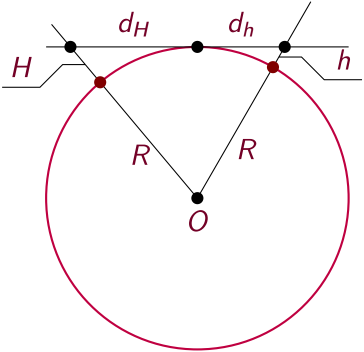
- $(R+H)^2 = R^2 + d_H^2$;
- $d_H = \sqrt{2RH + H^2}$;
- $d_h = \sqrt{2Rh + h^2}$;
- W zastosowaniach $H, h \ll R$, czyli $d_H + d_h \sim \sqrt{2R}(\sqrt{H} + \sqrt{h})$;

Rozwiązanie



- $(R+H)^2 = R^2 + d_H^2$;
- $d_H = \sqrt{2RH + H^2}$;
- $d_h = \sqrt{2Rh + h^2}$;
- W zastosowaniach $H, h \ll R$, czyli $d_H + d_h \sim \sqrt{2R}(\sqrt{H} + \sqrt{h})$;
- $\sqrt{2R} \sim 3550[m]$. Mila morska ma $\sim 1850m$. Czyli

Rozwiązanie



- $(R+H)^2 = R^2 + d_H^2$;
- $d_H = \sqrt{2RH + H^2}$;
- $d_h = \sqrt{2Rh + h^2}$;
- W zastosowaniach $H, h \ll R$, czyli $d_H + d_h \sim \sqrt{2R}(\sqrt{H} + \sqrt{h})$;
- $\sqrt{2R} \sim 3550[m]$. Mila morska ma $\sim 1850m$. Czyli
- $d_H + d_h \sim 1.92(\sqrt{H} + \sqrt{h})[Mm]$.

Zadanie

Dwoje rodziców o ciemnych włosach ma pierwsze dziecko, które jest blondynem. Jakie jest prawdopodobieństwo, ze drugie dziecko będzie miało jasne włosy?

Zadanie

Dwoje rodziców o ciemnych włosach ma pierwsze dziecko, które jest blondynem. Jakie jest prawdopodobieństwo, ze drugie dziecko będzie miało jasne włosy?

Gen opisujący ciemne włosy jest dominujący: gdyby był recesywny każdy z rodziców o ciemnych włosach miałby po dwa allele recesywne i wtedy wszystkie ich dzieci miałyby ciemne włosy. Jeśli urodziło się dziecko z jasnymi włosami, każde z rodziców ma allel dominujący i allel recesywny. Dziecko będzie miało jasne włosy, gdy po obojgu rodzicach odziedziczy gen recesywny. Na to jest szansa $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, na ciemne włosy ma więc 75% szans.

Zadanie

Mój kolega ma dwójkę dzieci. Przychodzę do niego, drzwi otwiera chłopiec. Jakie jest prawdopodobieństwo, że drugim dzieckiem jest dziewczynka? Zakładamy, że chłopcy rodzą się tak samo często jak dziewczynki.

Prawdopodobieństwo II.

Zadanie

Mój kolega ma dwójkę dzieci. Przychodzę do niego, drzwi otwiera chłopiec. Jakie jest prawdopodobieństwo, że drugim dzieckiem jest dziewczynka? Zakładamy, że chłopcy rodzą się tak samo często jak dziewczynki.

Odpowiedzią nie jest $1/2$!

Zadanie

Mój kolega ma dwójkę dzieci. Przychodzę do niego, drzwi otwiera chłopiec. Jakie jest prawdopodobieństwo, że drugim dzieckiem jest dziewczynka? Zakładamy, że chłopcy rodzą się tak samo często jak dziewczynki.

Odpowiedzią nie jest $1/2$!Odpowiedź. $2/3$.

Prawdopodobieństwo II.

Zadanie

Mój kolega ma dwójkę dzieci. Przychodzę do niego, drzwi otwiera chłopiec. Jakie jest prawdopodobieństwo, że drugim dzieckiem jest dziewczynka? Zakładamy, że chłopcy rodzą się tak samo często jak dziewczynki.

Odpowiedź. $2/3$.
To zadanie pokazuje skalę trudności pojęcia prawdopodobieństwa.

„Idź na całość”

Zadanie

Mąż wraca do domu wcześniej. Czuje w domu obce perfumy, podejrzewa kochanka. Biegnie w kierunku jednej z losowo trzech szaf, żeby sprawdzić czy tam jest kochanek. Zrozpaczona żona otwiera jedną z pustych szaf i krzyczy: patrz, tu nie ma. Czy mąż powinien zmienić szafę do której biegnie?

Nasza przestrzeń zdarzeń składa się z 12 elementów. Napis 123 oznacza: mąż biegnie do pierwszej szafy, kochanek jest w drugiej, żona otwiera trzecią.

112	113	123	132
213	221	223	231
312	321	331	332.

Przestrzeń zdarzeń

Nasza przestrzeń zdarzeń składa się z 12 elementów. Napis 123 oznacza: mąż biegnie do pierwszej szafy, kochanek jest w drugiej, żona otwiera trzecią.

112	113	123	132
213	221	223	231
312	321	331	332.

- Wydaje się, że wszystkie zdarzenia są jednakowo prawdopodobne.

Przestrzeń zdarzeń

Nasza przestrzeń zdarzeń składa się z 12 elementów. Napis 123 oznacza: mąż biegnie do pierwszej szafy, kochanek jest w drugiej, żona otwiera trzecią.

$$\begin{array}{cccc} 112 & 113 & 123 & 132 \\ 213 & 221 & 223 & 231 \\ 312 & 321 & 331 & 332. \end{array}$$

- Wydaje się, że wszystkie zdarzenia są jednakowo prawdopodobne.
- Ale tak nie jest. Zdarzenia $11x$, $22x$ i $33x$ mają prawdopodobieństwo $\frac{1}{18}$, pozostałe mają $\frac{1}{9}$.

Przestrzeń zdarzeń

Nasza przestrzeń zdarzeń składa się z 12 elementów. Napis 123 oznacza: mąż biegnie do pierwszej szafy, kochanek jest w drugiej, żona otwiera trzecią.

112	113	123	132
213	221	223	231
312	321	331	332.

- Wydaje się, że wszystkie zdarzenia są jednakowo prawdopodobne.
- Ale tak nie jest. Zdarzenia $11x$, $22x$ i $33x$ mają prawdopodobieństwo $\frac{1}{18}$, pozostałe mają $\frac{1}{9}$.
- Czyli zdarzenia, że kochanek jest tam, gdzie mąż biegnie początkowo mają prawdopodobieństwo $1/3$.

Implementacja

```
def oplaca():
    wybor=randrange(1,4)
    miejsce=randrange(1,4)
    zona=wybor
    while ((zona==wybor) or (zona==miejsce)):
        zona=randrange(1,4)
    drugiwybor=6-wybor-zona
    if (drugiwybor==miejsce):
        return True
    else:
        return False
op=0
for i in range(10000):
    if (oplaca()):
     op=op+1
```

Implementacja

- Implementacja w Pythonie

```
def oplaca():
    wybor=randrange(1,4)
    miejsce=randrange(1,4)
    zona=wybor
    while ((zona==wybor) or (zona==miejsce)):
        zona=randrange(1,4)
    drugiwybor=6-wybor-zona
    if (drugiwybor==miejsce):
        return True
    else:
        return False
op=0
for i in range(10000):
    if (oplaca()):
     op=op+1
```

Implementacja

```
def oplaca():
    wybor=randrange(1,4)
    miejsce=randrange(1,4)
    zona=wybor
    while ((zona==wybor) or (zona==miejsce)):
        zona=randrange(1,4)
    drugiwybor=6-wybor-zona
    if (drugiwybor==miejsce):
        return True
    else:
        return False
op=0
for i in range(10000):
    if (oplaca()):
     op=op+1
```

- Implementacja w Pythonie
- `randrange()` losuje liczbę $\{1, 2, 3\}$

Implementacja

```
def oplaca():
    wybor=randrange(1,4)
    miejsce=randrange(1,4)
    zona=wybor
    while ((zona==wybor) or (zona==miejsce)):
        zona=randrange(1,4)
    drugiwybor=6-wybor-zona
    if (drugiwybor==miejsce):
        return True
    else:
        return False
op=0
for i in range(10000):
    if (oplaca()):
     op=op+1
```

- Implementacja w Pythonie
- `randrange()` losuje liczbę $\{1, 2, 3\}$
- Pętla w definicji oplaca wyszukuje szafę, którą otwiera żona.

Implementacja

```
def oplaca():
    wybor=randrange(1,4)
    miejsce=randrange(1,4)
    zona=wybor
    while ((zona==wybor) or (zona==miejsce)):
        zona=randrange(1,4)
    drugiwybor=6-wybor-zona
    if (drugiwybor==miejsce):
        return True
    else:
        return False
op=0
for i in range(10000):
    if (oplaca()):
     op=op+1
```

- Implementacja w Pythonie
- `randrange()` losuje liczbę $\{1, 2, 3\}$
- Pętla w definicji oplaca wyszukuje szafę, którą otwiera żona.
- `drugiwybor` to jest szafka, którą może wybrać mąż.

Implementacja

```
def oplaca():
    wybor=randrange(1,4)
    miejsce=randrange(1,4)
    zona=wybor
    while ((zona==wybor) or (zona==miejsce)):
        zona=randrange(1,4)
    drugiwybor=6-wybor-zona
    if (drugiwybor==miejsce):
        return True
    else:
        return False
op=0
for i in range(10000):
    if (oplaca()):
     op=op+1
```

- Implementacja w Pythonie
- `randrange()` losuje liczbę $\{1, 2, 3\}$
- Pętla w definicji oplaca wyszukuje szafę, którą otwiera żona.
- `drugiwybor` to jest szafka, którą może wybrać mąż.
- Opłaca się zmienić, jeśli `drugiwybor=miejsce`.

Implementacja

```
def oplaca():
    wybor=randrange(1,4)
    miejsce=randrange(1,4)
    zona=wybor
    while ((zona==wybor) or (zona==miejsce)):
        zona=randrange(1,4)
    drugiwybor=6-wybor-zona
    if (drugiwybor==miejsce):
        return True
    else:
        return False
op=0
for i in range(10000):
    if (oplaca()):
     op=op+1
```

- Implementacja w Pythonie
- `randrange()` losuje liczbę $\{1, 2, 3\}$
- Pętla w definicji oplaca wyszukuje szafę, którą otwiera żona.
- `drugiwybor` to jest szafka, którą może wybrać mąż.
- Opłaca się zmienić, jeśli `drugiwybor=miejsce`.
- Wychodzi około 6666 przypadków.

Wartość oczekiwana.

Mamy nietypowy punkt w podstawie programowej.

Punkt XII.5

Oblicza wartość oczekiwaną, np. przy ustalaniu wysokości wygranej w prostych grach losowych i loteriach.

Wartość oczekiwana.

Mamy nietypowy punkt w podstawie programowej.

Punkt XII.5

Oblicza wartość oczekiwaną, np. przy ustalaniu wysokości wygranej w prostych grach losowych i loteriach.

Zadanie

W sklepie są zwykłe chipsy po 3PLN/paczkę i chipsy z losem po 4PLN/paczkę, które różnią się tym, że w tych drugich jest los, który raz na 4 paczki daje mi drugą paczkę chipsów, ale tym razem tych bez losa. Kupuję chipsy za 24PLN. Ile mogę się spodziewać paczek chipsów gdy kupuję tylko te za 3PLN, a ile gdy kupuję te po 4PLN?

Wartość oczekiwana.

Mamy nietypowy punkt w podstawie programowej.

Punkt XII.5

Oblicza wartość oczekiwaną, np. przy ustalaniu wysokości wygranej w prostych grach losowych i loteriach.

Zadanie

W sklepie są zwykłe chipsy po 3PLN/paczkę i chipsy z losem po 4PLN/paczkę, które różnią się tym, że w tych drugich jest los, który raz na 4 paczki daje mi drugą paczkę chipsów, ale tym razem tych bez losa. Kupuję chipsy za 24PLN. Ile mogę się spodziewać paczek chipsów gdy kupuję tylko te za 3PLN, a ile gdy kupuję te po 4PLN?

Zadanie

Co gdy dostaję znowu chipsy z losem w środku?

Wartość oczekiwana.

Mamy nietypowy punkt w podstawie programowej.

Punkt XII.5

Oblicza wartość oczekiwaną, np. przy ustalaniu wysokości wygranej w prostych grach losowych i loteriach.

Zadanie

W sklepie są zwykłe chipsy po 3PLN/paczkę i chipsy z losem po 4PLN/paczkę, które różnią się tym, że w tych drugich jest los, który raz na 4 paczki daje mi drugą paczkę chipsów, ale tym razem tych bez losa. Kupuję chipsy za 24PLN. Ile mogę się spodziewać paczek chipsów gdy kupuję tylko te za 3PLN, a ile gdy kupuję te po 4PLN?

Zadanie

Co gdy dostaję znowu chipsy z losem w środku?

To ostatnie można zrobić tak, żeby dojść do szeregów geometrycznych.

Cel wartości oczekiwanej.

Formalnie zdefiniowana wartość oczekiwana jest za trudna na poziom podstawowy.

Cel wartości oczekiwanej.

Formalnie zdefiniowana wartość oczekiwana jest za trudna na poziom podstawowy. To znaczy, nie każdy nauczyciel, nie z każdą klasą jest w stanie tego nauczyć.

Cel wartości oczekiwanej.

Formalnie zdefiniowana wartość oczekiwana jest za trudna na poziom podstawowy. To znaczy, nie każdy nauczyciel, nie z każdą klasą jest w stanie tego nauczyć.

Prawo

Pewne rzeczy związane z ryzykiem da się opisać matematycznie i policzyć.

Zadanie

Jak znaleźć „godzinę dziewiątą"?

Funkcje wykładnicze

Prawo

Jeśli zmiana w czasie jakieś wielkości jest proporcjonalna do niej samej, to wielkość ta zależy od czasu w sposób wykładniczy.

Funkcje wykładnicze

Prawo

Jeśli zmiana w czasie jakieś wielkości jest proporcjonalna do niej samej, to wielkość ta zależy od czasu w sposób wykładniczy.

Wyjaśnienie dla nauczycieli.

Jeśli $\frac{d}{dt}x(t) = cx(t)$, to $x(t) = C_0 e^c t$. □

Funkcje wykładnicze

Prawo

Jeśli zmiana w czasie jakieś wielkości jest proporcjonalna do niej samej, to wielkość ta zależy od czasu w sposób wykładniczy.

- Rozpad promieniotwórczy;

Funkcje wykładnicze

Prawo

Jeśli zmiana w czasie jakieś wielkości jest proporcjonalna do niej samej, to wielkość ta zależy od czasu w sposób wykładniczy.

- Rozpad promieniotwórczy;
- Reakcja łańcuchowa;

Funkcje wykładnicze

Prawo

Jeśli zmiana w czasie jakieś wielkości jest proporcjonalna do niej samej, to wielkość ta zależy od czasu w sposób wykładniczy.

- Rozpad promieniotwórczy;
- Reakcja łańcuchowa;
- Metabolizm substancji w organizmie;

Funkcje wykładnicze

Prawo

Jeśli zmiana w czasie jakieś wielkości jest proporcjonalna do niej samej, to wielkość ta zależy od czasu w sposób wykładniczy.

- Rozpad promieniotwórczy;
- Reakcja łańcuchowa;
- Metabolizm substancji w organizmie;
- Namnażanie się bakterii;

Funkcje wykładnicze

Prawo

Jeśli zmiana w czasie jakieś wielkości jest proporcjonalna do niej samej, to wielkość ta zależy od czasu w sposób wykładniczy.

- Rozpad promieniotwórczy;
- Reakcja łańcuchowa;
- Metabolizm substancji w organizmie;
- Namnażanie się bakterii;
- Piramida finansowa;

Funkcje wykładnicze

Prawo

Jeśli zmiana w czasie jakieś wielkości jest proporcjonalna do niej samej, to wielkość ta zależy od czasu w sposób wykładniczy.

- Rozpad promieniotwórczy;
- Reakcja łańcuchowa;
- Metabolizm substancji w organizmie;
- Namnażanie się bakterii;
- Piramida finansowa;
- Wzrost gospodarczy czy inflacja, jeśli są stałe rok do roku. Odsetki na lokacie.

Logarytm

Prawo

Jeśli dwukrotne zwiększenie argumentu oznacza zwiększenie wartości funkcji o stałą wielkość, to zależność jest logarytmiczna.

Prawo

Jeśli dwukrotne zwiększenie argumentu oznacza zwiększenie wartości funkcji o stałą wielkość, to zależność jest logarytmiczna.

Wyjaśnienie dla nauczycieli.

Jeśli $f(2x) = f(x) + c$ i f ciągła, to $f(x) = C \log x$ dla pewnego C. □

Logarytm

Prawo

Jeśli dwukrotne zwiększenie argumentu oznacza zwiększenie wartości funkcji o stałą wielkość, to zależność jest logarytmiczna.

- skala Richtera;

Logarytm

Prawo

Jeśli dwukrotne zwiększenie argumentu oznacza zwiększenie wartości funkcji o stałą wielkość, to zależność jest logarytmiczna.

- skala Richtera;
- skala pH;

Logarytm

Prawo

Jeśli dwukrotne zwiększenie argumentu oznacza zwiększenie wartości funkcji o stałą wielkość, to zależność jest logarytmiczna.

- skala Richtera;
- skala pH;
- Skala decybelowa...

Logarytm

Prawo

Jeśli dwukrotne zwiększenie argumentu oznacza zwiększenie wartości funkcji o stałą wielkość, to zależność jest logarytmiczna.

- skala Richtera;
- skala pH;
- Skala decybelowa...
- ...a co za tym idzie potencjometry w regulatorach głośności są logarytmiczne;

Logarytm

Prawo

Jeśli dwukrotne zwiększenie argumentu oznacza zwiększenie wartości funkcji o stałą wielkość, to zależność jest logarytmiczna.

- skala Richtera;
- skala pH;
- Skala decybelowa...
- ...a co za tym idzie potencjometry w regulatorach głośności są logarytmiczne;
- Prawo Webera–Fechnera:

Logarytm

Prawo

Jeśli dwukrotne zwiększenie argumentu oznacza zwiększenie wartości funkcji o stałą wielkość, to zależność jest logarytmiczna.

- skala Richtera;
- skala pH;
- Skala decybelowa...
- ...a co za tym idzie potencjometry w regulatorach głośności są logarytmiczne;
- Prawo Webera–Fechnera:

Prawo

Jeśli porównywane są wielkości bodźców, na naszą percepcję oddziałuje nie arytmetyczna różnica pomiędzy nimi, lecz stosunek porównywanych wielkości. (wg. Wikipedii)

- Skala jasności gwiazd: bodźcem jest ilość światła wpadającego do oka.

Ciągi

- Do tej pory: ciągi głównie arytmetyczne i geometryczne.

Ciągi

- Do tej pory: ciągi głównie arytmetyczne i geometryczne.

Zadanie

Sprawdź czy ciąg a_n *jest geometryczny i oblicz jego* 2010 *wyraz.*

Ciągi

- Do tej pory: ciągi głównie arytmetyczne i geometryczne.
- Wymieniane często jednym tchem z indukcją.

Ciągi

- Do tej pory: ciągi głównie arytmetyczne i geometryczne.
- Wymieniane często jednym tchem z indukcją.

Zadanie

Ciąg a_n *jest zadany wzorem* $a_0 = 0$, $a_n = a_{n-1} + n(n-1)$. *Wykaż, że* $a_n = \dots$.

- Nowość: ciągi opisują rzeczywistość.

Ciągi

- Do tej pory: ciągi głównie arytmetyczne i geometryczne.
- Wymieniane często jednym tchem z indukcją.
- Nowość: ciągi opisują rzeczywistość.
- Ciąg opisuje zmianę wielkości w zależności od czasu.

Ciągi

- Do tej pory: ciągi głównie arytmetyczne i geometryczne.
- Wymieniane często jednym tchem z indukcją.
- Nowość: ciągi opisują rzeczywistość.
- Ciąg opisuje zmianę wielkości w zależności od czasu.
- Ciągi typu $a_{n+1} = a_n + f(n)$ są pewnymi przybliżeniami równań różniczkowych.

Przykład z podstawy

Zadanie

Rozważmy zamkniętą populację w wiosce, gdzie mieszka N osób. Codziennie każda osoba spotyka się z k osobami. Zakładamy, że pierwszego dnia jedna osoba zostaje zarażona wirusem Eboli. Na każdą osobę z którą się zetknie zarażona, $c < 1$ się zarazi i od następnego dnia będzie zarażać. Opisz ile osób będzie chorych po 9 dniach, jeśli $k = 5$, $c = 0.3$, $N = 1000$.

Przykład z podstawy

Zadanie

Rozważmy zamkniętą populację w wiosce, gdzie mieszka N osób. Codziennie każda osoba spotyka się z k osobami. Zakładamy, że pierwszego dnia jedna osoba zostaje zarażona wirusem Eboli. Na każdą osobę z którą się zetknie zarażona, $c < 1$ się zarazi i od następnego dnia będzie zarażać. Opisz ile osób będzie chorych po 9 dniach, jeśli $k = 5$, $c = 0.3$, $N = 1000$.

Rozwiązanie.

Oznaczmy przez x_j liczbę zarażonych osób (nie przeszkadza nam, że to może być ułamek). Mamy rekurencje

$\square$

Przykład z podstawy

Zadanie

Rozważmy zamkniętą populację w wiosce, gdzie mieszka N osób. Codziennie każda osoba spotyka się z k osobami. Zakładamy, że pierwszego dnia jedna osoba zostaje zarażona wirusem Eboli. Na każdą osobę z którą się zetknie zarażona, $c < 1$ się zarazi i od następnego dnia będzie zarażać. Opisz ile osób będzie chorych po 9 dniach, jeśli $k = 5$, $c = 0.3$, $N = 1000$.

Rozwiązanie.

Oznaczmy przez x_j liczbę zarażonych osób (nie przeszkadza nam, że to może być ułamek). Mamy rekurencje

$$x_{j+1} = x_j + ckx_j \frac{N - x_j}{N}.$$

$\square$

Przykład z podstawy

Zadanie

Rozważmy zamkniętą populację w wiosce, gdzie mieszka N osób. Codziennie każda osoba spotyka się z k osobami. Zakładamy, że pierwszego dnia jedna osoba zostaje zarażona wirusem Eboli. Na każdą osobę z którą się zetknie zarażona, $c < 1$ się zarazi i od następnego dnia będzie zarażać. Opisz ile osób będzie chorych po 9 dniach, jeśli $k = 5$, $c = 0.3$, $N = 1000$.

Rozwiązanie.

Oznaczmy przez x_j liczbę zarażonych osób (nie przeszkadza nam, że to może być ułamek). Mamy rekurencje

$$x_{j+1} = x_j + ckx_j \frac{N - x_j}{N}.$$

Następnie podstawiamy dane liczbowe do wzoru. Wychodzi około 854. □

Komentarze

- Uwaga! Model przewiduje, że następnego dnia będzie chorych 1040 osób a potem liczba będzie malała. To jest niedoskonałość modelu. Niemniej, zawsze w granicy będziemy otrzymywali 1000.

Komentarze

- Uwaga! Model przewiduje, że następnego dnia będzie chorych 1040 osób a potem liczba będzie malała. To jest niedoskonałość modelu. Niemniej, zawsze w granicy będziemy otrzymywali 1000.
- Odpowiada za to dyskretyzacja czasu.

Komentarze

- Uwaga! Model przewiduje, że następnego dnia będzie chorych 1040 osób a potem liczba będzie malała. To jest niedoskonałość modelu. Niemniej, zawsze w granicy będziemy otrzymywali 1000.
- Odpowiada za to dyskretyzacja czasu.
- Łatwiej jest często pisać $y_j = x_j/N$. Wtedy $y_0 = 1/N$ ale $y_{j+1} = y_j + Dy_j(1 - y_j)$, gdzie D jest parametrem.

Komentarze

- Uwaga! Model przewiduje, że następnego dnia będzie chorych 1040 osób a potem liczba będzie malała. To jest niedoskonałość modelu. Niemniej, zawsze w granicy będziemy otrzymywali 1000.
- Odpowiada za to dyskretyzacja czasu.
- Łatwiej jest często pisać $y_j = x_j/N$. Wtedy $y_0 = 1/N$ ale $y_{j+1} = y_j + Dy_j(1 - y_j)$, gdzie D jest parametrem.
- Jeśli mamy tylko N' osób, które mogą być zarażone, to zmniejszamy N do N'. Czyli współczynnik D (szybkość rozprzestrzeniania się choroby) maleje proporcjonalnie.

Zaawansowany przykład

Rozważmy model choroby ze zdrowieniem i odpornością.

- Osoba chora zaraża jak poprzednio.

Zaawansowany przykład

Rozważmy model choroby ze zdrowieniem i odpornością.

- Osoba chora zaraża jak poprzednio.
- Każdego dnia odsetek p osób zdrowieje.

Zaawansowany przykład

Rozważmy model choroby ze zdrowieniem i odpornością.

- Osoba chora zaraża jak poprzednio.
- Każdego dnia odsetek p osób zdrowieje.
- Kto wyzdrowieje, nie zaraża już więcej.

Rozważmy model choroby ze zdrowieniem i odpornością.

- Osoba chora zaraża jak poprzednio.
- Każdego dnia odsetek p osób zdrowieje.
- Kto wyzdrowieje, nie zaraża już więcej.

Oznaczenia

Zaawansowany przykład

Rozważmy model choroby ze zdrowieniem i odpornością.

- Osoba chora zaraża jak poprzednio.
- Każdego dnia odsetek p osób zdrowieje.
- Kto wyzdrowieje, nie zaraża już więcej.

Oznaczenia

- m_n: odsetek osób mogących zachorować;

Zaawansowany przykład

Rozważmy model choroby ze zdrowieniem i odpornością.

- Osoba chora zaraża jak poprzednio.
- Każdego dnia odsetek p osób zdrowieje.
- Kto wyzdrowieje, nie zaraża już więcej.

Oznaczenia

- m_n: odsetek osób mogących zachorować;
- c_n: odsetek osób zarażonych

Zaawansowany przykład

Rozważmy model choroby ze zdrowieniem i odpornością.

- Osoba chora zaraża jak poprzednio.
- Każdego dnia odsetek p osób zdrowieje.
- Kto wyzdrowieje, nie zaraża już więcej.

Oznaczenia

- m_n: odsetek osób mogących zachorować;
- c_n: odsetek osób zarażonych
- o_n: odsetek osób odpornych.

Zaawansowany przykład

Rozważmy model choroby ze zdrowieniem i odpornością.

- Osoba chora zaraża jak poprzednio.
- Każdego dnia odsetek p osób zdrowieje.
- Kto wyzdrowieje, nie zaraża już więcej.

- $m_{n+1} = m_n - Dc_n m_n$

Oznaczenia

- m_n: odsetek osób mogących zachorować;
- c_n: odsetek osób zarażonych
- o_n: odsetek osób odpornych.

Zaawansowany przykład

Rozważmy model choroby ze zdrowieniem i odpornością.

- Osoba chora zaraża jak poprzednio.
- Każdego dnia odsetek p osób zdrowieje.
- Kto wyzdrowieje, nie zaraża już więcej.

Oznaczenia

- m_n: odsetek osób mogących zachorować;
- c_n: odsetek osób zarażonych
- o_n: odsetek osób odpornych.

- $m_{n+1} = m_n - Dc_n m_n$
- $c_{n+1} = (1-p)c_n + Dc_n m_n$

Zaawansowany przykład

Rozważmy model choroby ze zdrowieniem i odpornością.

- Osoba chora zaraża jak poprzednio.
- Każdego dnia odsetek p osób zdrowieje.
- Kto wyzdrowieje, nie zaraża już więcej.

Oznaczenia

- m_n: odsetek osób mogących zachorować;
- c_n: odsetek osób zarażonych
- o_n: odsetek osób odpornych.

- $m_{n+1} = m_n - Dc_n m_n$
- $c_{n+1} = (1-p)c_n + Dc_n m_n$
- $o_{n+1} = o_n + pc_n$.

Implementacja modelu

```
def second_model():
    c=0.01
    o=0.1
    m=1-c-o
    count=0
    while (c>0.0001):
        yield m,c,o,count
        s=0.3*m*c
        z=0.1*c
        o=o+z
        m=m-s
        c=c-z+s
        count=count+1
r=second_model()
for i in r:
    print(i)
```

Wyniki i dyskusja

- Proces kończy się po 135 dniach. $o_{135} = 0.93$, co oznacza 83% populacji chorowała.

Wyniki i dyskusja

- Proces kończy się po 135 dniach. $o_{135} = 0.93$, co oznacza 83% populacji chorowała.
- Od 29. do 35. dnia chorowało ponad 20% populacji.

Wyniki i dyskusja

- Proces kończy się po 135 dniach. $o_{135} = 0.93$, co oznacza 83% populacji chorowała.
- Od 29. do 35. dnia chorowało ponad 20% populacji.
- Zmieniamy o z 0.1 na 0.8.

Wyniki i dyskusja

- Proces kończy się po 135 dniach. $o_{135} = 0.93$, co oznacza 83% populacji chorowała.
- Od 29. do 35. dnia chorowało ponad 20% populacji.
- Zmieniamy o z 0.1 na 0.8.
- Proces kończy się po 85 dniach. $o_{85} = 0.82$. Zachorowało 2% populacji.

Wyniki i dyskusja

- Proces kończy się po 135 dniach. $o_{135} = 0.93$, co oznacza 83% populacji chorowała.
- Od 29. do 35. dnia chorowało ponad 20% populacji.
- Zmieniamy o z 0.1 na 0.8.
- Proces kończy się po 85 dniach. $o_{85} = 0.82$. Zachorowało 2% populacji.
- Ciąg c_n jest malejący.

Wyniki i dyskusja

- Proces kończy się po 135 dniach. $o_{135} = 0.93$, co oznacza 83% populacji chorowała.
- Od 29. do 35. dnia chorowało ponad 20% populacji.
- Zmieniamy o z 0.1 na 0.8.
- Proces kończy się po 85 dniach. $o_{85} = 0.82$. Zachorowało 2% populacji.
- Ciąg c_n jest malejący.

W ten sposób sprawdzamy rozwój epidemii przy danym odsetku populacji mających odporność.