Podstawa programowa z matematyki

Maciej Borodzik, Regina Pruszyńska

lipiec 2018

Cele ogólne

Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

Wyjaśnienie

- Uczniowie nie potrafią liczyć i zarzucają tę naukę.

Wyjaśnienie

- Uczniowie nie potrafią liczyć i zarzucają tę naukę.
- Nieumiejętność liczenia stanowi problem w kształtowaniu innych umiejętności matematycznych.

Wyjaśnienie

- Uczniowie nie potrafią liczyć i zarzucają tę naukę.
- Nieumiejętność liczenia stanowi problem w kształtowaniu innych umiejętności matematycznych.
- Pożądany poziom sprawności: „wiem, że umiem coś policzyć".

Sprawność rachunkowa

- Wskazane: Pewne zadania ćwiczące, przypominające sprawność rachunkową, bez użycia kalkulatora.

Sprawność rachunkowa

- Wskazane: Pewne zadania ćwiczące, przypominające sprawność rachunkową, bez użycia kalkulatora.
- Wątpliwe: Nadmiar takich zadań.

Sprawność rachunkowa

- Wskazane: Pewne zadania ćwiczące, przypominające sprawność rachunkową, bez użycia kalkulatora.
- Wątpliwe: Nadmiar takich zadań.
- Wątpliwe: Zadania rachunkowe o znacznym stopniu złożoności.

Sprawność rachunkowa

- Wskazane: Pewne zadania ćwiczące, przypominające sprawność rachunkową, bez użycia kalkulatora.
- Wątpliwe: Nadmiar takich zadań.
- Wątpliwe: Zadania rachunkowe o znacznym stopniu złożoności.
- Niedopuszczalne: Położenie głównego nacisku na zadania rachunkowe.

Uczeń wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych.

Liczby niewymierne

Uczeń wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych.

- Cel wprowadzenia:

Liczby niewymierne

Uczeń wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych.

- Cel wprowadzenia: uniknięcie sytuacji, w której napis zawierający np. $2 + \sqrt{5}$ będzie uznany za niezgodny z podstawą przez prawników.

Liczby niewymierne

Uczeń wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych.

- Cel wprowadzenia: uniknięcie sytuacji, w której napis zawierający np. $2+\sqrt{5}$ będzie uznany za niezgodny z podstawą przez prawników.
- Celem nie jest:

Liczby niewymierne

Uczeń wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych.

- Cel wprowadzenia: uniknięcie sytuacji, w której napis zawierający np. $2+\sqrt{5}$ będzie uznany za niezgodny z podstawą przez prawników.
- Celem nie jest: abstrakcyjne wprowadzenie liczb rzeczywistych;

Liczby niewymierne

Uczeń wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych.

- Cel wprowadzenia: uniknięcie sytuacji, w której napis zawierający np. $2 + \sqrt{5}$ będzie uznany za niezgodny z podstawą przez prawników.
- Celem nie jest: abstrakcyjne wprowadzenie liczb rzeczywistych;
- Intencją twórców podstawy nie jest:

Liczby niewymierne

Uczeń wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych.

- Cel wprowadzenia: uniknięcie sytuacji, w której napis zawierający np. $2 + \sqrt{5}$ będzie uznany za niezgodny z podstawą przez prawników.
- Celem nie jest: abstrakcyjne wprowadzenie liczb rzeczywistych;
- Intencją twórców podstawy nie jest: rozwlekanie się nad liczbami niewymiernymi.

Szkolna definicja liczby niewymiernej

Definicja

Liczba jest niewymierna, jeśli ma rozwinięcie dziesiętne nieokresowe.

Szkolna definicja liczby niewymiernej

Definicja

Liczba jest niewymierna, jeśli ma rozwinięcie dziesiętne nieokresowe.

Czy ktoś potrafi pokazać, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną w myśl tej definicji?

Szkolna definicja liczby niewymiernej

Definicja

Liczba jest niewymierna, jeśli ma rozwinięcie dziesiętne nieokresowe.

Czy ktoś potrafi pokazać, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną w myśl tej definicji?
W jaki sposób nauczyciel ma zrealizować warunek realizacji: uczeń poznaje dowód niewymierności $\log_2 5$, $\sqrt{2}$, bazując na tej definicji?

Szkolna definicja liczby niewymiernej

Definicja

Liczba jest niewymierna, jeśli ma rozwinięcie dziesiętne nieokresowe.

Czy ktoś potrafi pokazać, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną w myśl tej definicji?
W jaki sposób nauczyciel ma zrealizować warunek realizacji: uczeń poznaje dowód niewymierności $\log_2 5$, $\sqrt{2}$, bazując na tej definicji?
W tym kontekście, szkolna definicja jest niezgodna z zapisami nowej podstawy programowej.

Poprawna definicja liczby niewymiernej

Definicja

Liczbę rzeczywistą nazwiemy *niewymierną*, jeśli nie da się jej przedstawić jako iloraz $\frac{p}{q}$, gdzie p i q całkowite, oraz $q \neq 0$.

Trudności w definicji liczb niewymiernych

- Co to znaczy, że liczba ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone?

Trudności w definicji liczb niewymiernych

- Co to znaczy, że liczba ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone? Liczba jest granicą ciągu swoich przybliżeń dziesiętnych.

Trudności w definicji liczb niewymiernych

- Co to znaczy, że liczba ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone? Liczba jest granicą ciągu swoich przybliżeń dziesiętnych.
- Czy liczba może mieć różne rozwinięcia dziesiętne?

Trudności w definicji liczb niewymiernych

- Co to znaczy, że liczba ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone? Liczba jest granicą ciągu swoich przybliżeń dziesiętnych.
- Czy liczba może mieć różne rozwinięcia dziesiętne?
- Czy każda liczba ma co najmniej jedno?

Trudności w definicji liczb niewymiernych

- Co to znaczy, że liczba ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone? Liczba jest granicą ciągu swoich przybliżeń dziesiętnych.
- Czy liczba może mieć różne rozwinięcia dziesiętne?
- Czy każda liczba ma co najmniej jedno?
- Ścisłe wprowadzenie liczb rzeczywistych wymaga zaawansowanych pojęć topologii metrycznej (zupełność) i absolutnie nie nadaje się do realizacji w szkole, poza bardzo wyjątkowymi sytuacjami.

Trudności w definicji liczb niewymiernych

- Co to znaczy, że liczba ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone? Liczba jest granicą ciągu swoich przybliżeń dziesiętnych.
- Czy liczba może mieć różne rozwinięcia dziesiętne?
- Czy każda liczba ma co najmniej jedno?
- Ścisłe wprowadzenie liczb rzeczywistych wymaga zaawansowanych pojęć topologii metrycznej (zupełność) i absolutnie nie nadaje się do realizacji w szkole, poza bardzo wyjątkowymi sytuacjami.
- Niedopuszczalne jest wprowadzanie liczb rzeczywistych jako uzupełnienia liczb wymiernych w podręcznikach dopuszczonych przez MEN, nawet jako materiał dodatkowy.

Trudności w definicji liczb niewymiernych

- Co to znaczy, że liczba ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone? Liczba jest granicą ciągu swoich przybliżeń dziesiętnych.
- Czy liczba może mieć różne rozwinięcia dziesiętne?
- Czy każda liczba ma co najmniej jedno?
- Ścisłe wprowadzenie liczb rzeczywistych wymaga zaawansowanych pojęć topologii metrycznej (zupełność) i absolutnie nie nadaje się do realizacji w szkole, poza bardzo wyjątkowymi sytuacjami.
- Niedopuszczalne jest wprowadzanie liczb rzeczywistych jako uzupełnienia liczb wymiernych w podręcznikach dopuszczonych przez MEN, nawet jako materiał dodatkowy.
- Takie wprowadzenie, przy obecnym poziomie wsparcia merytorycznego dla nauczycieli, przyniesie o wiele więcej szkód.

Logarytmy

Przy nauczaniu logarytmów warto podkreślić ich zastosowania w wyjaśnianiu zjawisk przyrodniczych, których przebieg opisuje funkcja logarytmiczna. Procesy takie zachodzą, gdy w przedziale czasowym pewna wielkość zawsze rośnie (lub maleje) ze stałą krotnością.

Logarytmy

Przy nauczaniu logarytmów warto podkreślić ich zastosowania w wyjaśnianiu zjawisk przyrodniczych, których przebieg opisuje funkcja logarytmiczna. Procesy takie zachodzą, gdy w przedziale czasowym pewna wielkość zawsze rośnie (lub maleje) ze stałą krotnością.

- Wskazane: Wprowadzenie logarytmów obudowane odpowiednią ilością przykładów „z życia".

Logarytmy

Przy nauczaniu logarytmów warto podkreślić ich zastosowania w wyjaśnianiu zjawisk przyrodniczych, których przebieg opisuje funkcja logarytmiczna. Procesy takie zachodzą, gdy w przedziale czasowym pewna wielkość zawsze rośnie (lub maleje) ze stałą krotnością.

- Wskazane: Wprowadzenie logarytmów obudowane odpowiednią ilością przykładów „z życia".
- Wątpliwe: Skupianie się na algebraicznych własnościach funkcji logarytm, zwłaszcza na poziomie podstawowym.

Logarytmy

Przy nauczaniu logarytmów warto podkreślić ich zastosowania w wyjaśnianiu zjawisk przyrodniczych, których przebieg opisuje funkcja logarytmiczna. Procesy takie zachodzą, gdy w przedziale czasowym pewna wielkość zawsze rośnie (lub maleje) ze stałą krotnością.

- Wskazane: Wprowadzenie logarytmów obudowane odpowiednią ilością przykładów „z życia".
- Wątpliwe: Skupianie się na algebraicznych własnościach funkcji logarytm, zwłaszcza na poziomie podstawowym.
- Niedopuszczalne: Całkowite pominięcie zastosowań funkcji logarytm.

Przy nauczaniu logarytmów warto podkreślić ich zastosowania w wyjaśnianiu zjawisk przyrodniczych, których przebieg opisuje funkcja logarytmiczna. Procesy takie zachodzą, gdy w przedziale czasowym pewna wielkość zawsze rośnie (lub maleje) ze stałą krotnością.

- Wskazane: Wprowadzenie logarytmów obudowane odpowiednią ilością przykładów „z życia”.
- Wątpliwe: Skupianie się na algebraicznych własnościach funkcji logarytm, zwłaszcza na poziomie podstawowym.
- Niedopuszczalne: Całkowite pominięcie zastosowań funkcji logarytm.
- Wyjaśnienie: uczniowie na poziomie podstawowym muszą przede wszystkim wiedzieć, po co jest ten logarytm, a nie skupiać się na tym, że jest to homomorfizm grupy $(\mathbb{R}_{>0}, *)$ na $(\mathbb{R}, +)$.

- Zwiększenie różnorodności zadań, w tym zadań łatwych;

Wyrażenia algebraiczne. Cel i kierunek zmian

- Zwiększenie różnorodności zadań, w tym zadań łatwych;
- Podkreślenie umiejętności rozwiązywania równań postaci $(x-1)(x-3)=0$ przez napisanie $x=1,3$;

Wyrażenia algebraiczne. Cel i kierunek zmian

- Zwiększenie różnorodności zadań, w tym zadań łatwych;
- Podkreślenie umiejętności rozwiązywania równań postaci $(x-1)(x-3)=0$ przez napisanie $x=1,3$;
- Pozwolenie na związki z informatyką (schemat Hornera);

- Wskazane: Proste i różnorodne zadania na poziomie podstawowym;

Wyrażenia algebraiczne. Konsekwencje zapisów

- Wskazane: Proste i różnorodne zadania na poziomie podstawowym;
- Wskazane: Metoda rozwiązywania równań kwadratowych przez dopełnienie do pełnego kwadratu;

Wyrażenia algebraiczne. Konsekwencje zapisów

- Wskazane: Proste i różnorodne zadania na poziomie podstawowym;
- Wskazane: Metoda rozwiązywania równań kwadratowych przez dopełnienie do pełnego kwadratu;
- Wskazane: Wyprowadzenie schematu Hornera;

Wyrażenia algebraiczne. Konsekwencje zapisów

- Wskazane: Proste i różnorodne zadania na poziomie podstawowym;
- Wskazane: Metoda rozwiązywania równań kwadratowych przez dopełnienie do pełnego kwadratu;
- Wskazane: Wyprowadzenie schematu Hornera;
- Niedopuszczalne: Istotne wykraczanie poziomu złożoności zadań poza stopień zapisany w podstawie.

Postać kanoniczna. Przy omawianiu funkcji kwadratowej podkreślać należy znaczenie postaci kanonicznej i wynikających z tej postaci własności. Warto zwrócić uwagę, że wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego oraz na współrzędne wierzchołka paraboli, są jedynie wnioskami z postaci kanonicznej. Wiele zagadnień związanych z funkcją kwadratową daje się rozwiązać bezpośrednio z tej postaci, bez mechanicznego stosowania wzorów. W szczególności postać kanoniczna pozwala znajdować najmniejszą lub największą wartość funkcji kwadratowej, a także oś symetrii jej wykresu.

Funkcje kwadratowe

Postać kanoniczna. Przy omawianiu funkcji kwadratowej podkreślać należy znaczenie postaci kanonicznej i wynikających z tej postaci własności. Warto zwrócić uwagę, że wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego oraz na współrzędne wierzchołka paraboli, są jedynie wnioskami z postaci kanonicznej. Wiele zagadnień związanych z funkcją kwadratową daje się rozwiązać bezpośrednio z tej postaci, bez mechanicznego stosowania wzorów. W szczególności postać kanoniczna pozwala znajdować najmniejszą lub największą wartość funkcji kwadratowej, a także oś symetrii jej wykresu.

- Powolne odchodzenie od redukcji nauczania i rozumienia równań kwadratowych do umiejętności policzenia wyróżnika.

Funkcje kwadratowe

Postać kanoniczna. Przy omawianiu funkcji kwadratowej podkreślać należy znaczenie postaci kanonicznej i wynikających z tej postaci własności. Warto zwrócić uwagę, że wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego oraz na współrzędne wierzchołka paraboli, są jedynie wnioskami z postaci kanonicznej. Wiele zagadnień związanych z funkcją kwadratową daje się rozwiązać bezpośrednio z tej postaci, bez mechanicznego stosowania wzorów. W szczególności postać kanoniczna pozwala znajdować najmniejszą lub największą wartość funkcji kwadratowej, a także oś symetrii jej wykresu.

- Powolne odchodzenie od redukcji nauczania i rozumienia równań kwadratowych do umiejętności policzenia wyróżnika.
- Postać kanoniczna nie wymaga pamięciowego opanowania wzorów.

Postać kanoniczna. Przy omawianiu funkcji kwadratowej podkreślać należy znaczenie postaci kanonicznej i wynikających z tej postaci własności. Warto zwrócić uwagę, że wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego oraz na współrzędne wierzchołka paraboli, są jedynie wnioskami z postaci kanonicznej. Wiele zagadnień związanych z funkcją kwadratową daje się rozwiązać bezpośrednio z tej postaci, bez mechanicznego stosowania wzorów. W szczególności postać kanoniczna pozwala znajdować najmniejszą lub największą wartość funkcji kwadratowej, a także oś symetrii jej wykresu.

- Powolne odchodzenie od redukcji nauczania i rozumienia równań kwadratowych do umiejętności policzenia wyróżnika.
- Postać kanoniczna nie wymaga pamięciowego opanowania wzorów.
- Wątpliwe: Nacisk na obliczanie wyróżnika na poziomie podstawowym;

Funkcje kwadratowe

Postać kanoniczna. Przy omawianiu funkcji kwadratowej podkreślać należy znaczenie postaci kanonicznej i wynikających z tej postaci własności. Warto zwrócić uwagę, że wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego oraz na współrzędne wierzchołka paraboli, są jedynie wnioskami z postaci kanonicznej. Wiele zagadnień związanych z funkcją kwadratową daje się rozwiązać bezpośrednio z tej postaci, bez mechanicznego stosowania wzorów. W szczególności postać kanoniczna pozwala znajdować najmniejszą lub największą wartość funkcji kwadratowej, a także oś symetrii jej wykresu.

- Powolne odchodzenie od redukcji nauczania i rozumienia równań kwadratowych do umiejętności policzenia wyróżnika.
- Postać kanoniczna nie wymaga pamięciowego opanowania wzorów.
- Wątpliwe: Nacisk na obliczanie wyróżnika na poziomie podstawowym;
- Funkcja kwadratowa pojawia się też przy optymalizacji.

Przedziały. Uczeń powinien wykorzystywać przedziały do opisu zbioru rozwiązań nierówności. Najważniejsza w odpowiedzi jest jej poprawność. Na przykład rozwiązanie nierówności $x^2 - 9x + 20 > 0$ może być zapisane na każdy z poniższych sposobów:

- rozwiązaniem nierówności może być każda liczba, która jest mniejsza od 4 lub większa od 5;
- rozwiązaniami są wszystkie liczby mniejsze od 4 i wszystkie liczby większe od 5;
- $x \in (-\infty, 4)$ lub $x \in (5, \infty)$;
- $x > 5$ lub $x < 4$;
- $x \in (-\infty, 4) \cup (5, \infty)$.

Nierówności cd.

Przekształcenia równoważne. W trakcie rozwiązywania równań i nierówności należy zwracać uwagę, że obok metody przekształceń równoważnych można stosować metodę wnioskowania (metoda analizy starożytnych). Po wyznaczeniu potencjalnego zbioru rozwiązań następuje sprawdzenie, które z wyznaczonych wartości istotnie są rozwiązaniami. W wielu sytuacjach nie warto domagać się przekształceń równoważnych, gdy metoda wnioskowania prowadzi do szybkich rezultatów. Ponadto uczniowie powinni wiedzieć, że uprawnioną metodą dowodzenia jest równoważne przekształcanie tezy.

Nierówności. Konsekwencje zapisów.

- Dopuszczamy i promujemy różne sposoby zapisu rozwiązania nierówności.

Nierówności. Konsekwencje zapisów.

- Dopuszczamy i promujemy różne sposoby zapisu rozwiązania nierówności.
- Wskazane: We wzorcowych rozwiązaniach w podręcznikach mogą się znaleźć różne formy odpowiedzi.

Nierówności. Konsekwencje zapisów.

- Dopuszczamy i promujemy różne sposoby zapisu rozwiązania nierówności.
- Wskazane: We wzorcowych rozwiązaniach w podręcznikach mogą się znaleźć różne formy odpowiedzi.
- Wątpliwe: Wszystkie odpowiedzi w podręczniku mają ten sam schemat.

Nierówności. Konsekwencje zapisów.

- Dopuszczamy i promujemy różne sposoby zapisu rozwiązania nierówności.
- Wskazane: We wzorcowych rozwiązaniach w podręcznikach mogą się znaleźć różne formy odpowiedzi.
- Wątpliwe: Wszystkie odpowiedzi w podręczniku mają ten sam schemat.
- Uwaga. Jest możliwość, że w podręczniku będzie jedno zadanie z kilkoma formami odpowiedzi. Trzeba uważać, żeby zapis był na tyle czytelny, żeby nauczyciele nie zaczęli wymagać podwójnej odpowiedzi.

Nierówności. Konsekwencje zapisów.

- Dopuszczamy i promujemy różne sposoby zapisu rozwiązania nierówności.
- Wskazane: We wzorcowych rozwiązaniach w podręcznikach mogą się znaleźć różne formy odpowiedzi.
- Wątpliwe: Wszystkie odpowiedzi w podręczniku mają ten sam schemat.
- Uwaga. Jest możliwość, że w podręczniku będzie jedno zadanie z kilkoma formami odpowiedzi. Trzeba uważać, żeby zapis był na tyle czytelny, żeby nauczyciele nie zaczęli wymagać podwójnej odpowiedzi.
- Wskazane: Przykładowo rozwiązane zadania na dowodzenie nierówności powinny stosować różne metody.

Nierówności. Konsekwencje zapisów.

- Dopuszczamy i promujemy różne sposoby zapisu rozwiązania nierówności.
- Wskazane: We wzorcowych rozwiązaniach w podręcznikach mogą się znaleźć różne formy odpowiedzi.
- Wątpliwe: Wszystkie odpowiedzi w podręczniku mają ten sam schemat.
- Uwaga. Jest możliwość, że w podręczniku będzie jedno zadanie z kilkoma formami odpowiedzi. Trzeba uważać, żeby zapis był na tyle czytelny, żeby nauczyciele nie zaczęli wymagać podwójnej odpowiedzi.
- Wskazane: Przykładowo rozwiązane zadania na dowodzenie nierówności powinny stosować różne metody.
- Jeśli w podręczniku pojawia się rozwiązanie celowo błędne (wzór jak nie należy postępować), to musi być jasno wskazane, czy błąd polega na złej metodzie, czy na niewłaściwym jej zastosowaniu. Takie „rozwiązanie" jest dopuszczalne pod warunkiem, że nie sprawia wrażenia iż jedna ze wskazanych powyżej metod jest błędna sama w sobie.

Złożenia funkcji

Podstawa: Uczeń odczytuje i interpretuje wartości funkcji, określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie;
Rozszerzenie: Uczeń posługuje się złożeniami funkcji.

Złożenia funkcji

Podstawa: Uczeń odczytuje i interpretuje wartości funkcji, określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie;
Rozszerzenie: Uczeń posługuje się złożeniami funkcji.

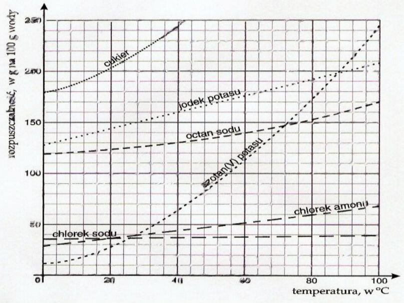
- Punkt na poziomie podstawowym mówi de facto o złożeniach funkcji i funkcji odwrotnej.

Złożenia funkcji

Podstawa: Uczeń odczytuje i interpretuje wartości funkcji, określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie;
Rozszerzenie: Uczeń posługuje się złożeniami funkcji.

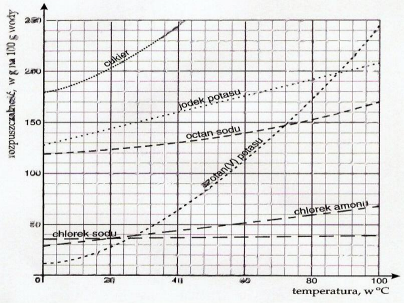
- Punkt na poziomie podstawowym mówi de facto o złożeniach funkcji i funkcji odwrotnej.
- Niedopuszczalne: Formalne wprowadzanie funkcji złożonej i odwrotnej na poziomie podstawowym.

Przykład



rozpuszczalność, w g na 100 g wody
cukier
jodek potasu
octan sodu
azotan(V) potasu
chlorek amonu
chlorek sodu
150
100
0
80
100
temperatura, w °C

Przykład



Zadanie

Na podanym wykresie podano rozpuszczalność różnych substancji w zależności od temperatury. W jakiej temperaturze rozpuści się w 100g wody o połowę mniej azotanu potasu, niż w temperaturze 80°*?*

- oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
- oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie, jak w przykładach:
- bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący;
- wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych (MB: ale nie tylko!), do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym

Zagadnienie to (MB: ciągi) należy omawiać tak, by uczniowie zdali sobie sprawę, że poza ciągami arytmetycznymi i geometrycznymi istnieją też inne. Podobnie należy podkreślić, że poza ciągami niemalejącymi, rosnącymi, nierosnącymi, malejącymi i stałymi istnieją też takie, które monotoniczne nie są. Warto zwrócić uwagę uczniów, że niektóre ciągi opisują dynamikę procesów występujących w przyrodzie bądź społeczeństwie.

Dotychczas:

Dotychczas:

- Ciągi arytmetyczne i geometryczne.

Dotychczas:

- Ciągi arytmetyczne i geometryczne.
- Badanie granicy (rozszerzenie).

Dotychczas:

- Ciągi arytmetyczne i geometryczne.
- Badanie granicy (rozszerzenie).
- Liczenie sumy wyrazów.

Dotychczas:

- Ciągi arytmetyczne i geometryczne.
- Badanie granicy (rozszerzenie).
- Liczenie sumy wyrazów.

Teraz:

Dotychczas:

- Ciągi arytmetyczne i geometryczne.
- Badanie granicy (rozszerzenie).
- Liczenie sumy wyrazów.

Teraz:

- Ciągi rekurencyjne.

Ciągi. Filozofia zmian.

Dotychczas:

- Ciągi arytmetyczne i geometryczne.
- Badanie granicy (rozszerzenie).
- Liczenie sumy wyrazów.

Teraz:

- Ciągi rekurencyjne.
- Główna zmiana: ciąg może być językiem opisu procesów przyrodniczych.

Dotychczas:

- Ciągi arytmetyczne i geometryczne.
- Badanie granicy (rozszerzenie).
- Liczenie sumy wyrazów.

Teraz:

- Ciągi rekurencyjne.
- Główna zmiana: ciąg może być językiem opisu procesów przyrodniczych.
- Nie wszystkie ciągi są arytmetyczne albo geometryczne: świat nie jest liniowy!

Przykład z podstawy

Zadanie

Rozważmy zamkniętą populację w wiosce, gdzie mieszka N osób. Codziennie każda osoba spotyka się z k osobami. Zakładamy, że pierwszego dnia jedna osoba zostaje zarażona wirusem Eboli. Na każdą osobę z którą się zetknie zarażona, $c < 1$ się zarazi i od następnego dnia będzie zarażać. Opisz ile osób będzie chorych po 9 dniach, jeśli $k = 5$, $c = 0.3$, $N = 1000$.

Przykład z podstawy

Zadanie

Rozważmy zamkniętą populację w wiosce, gdzie mieszka N osób. Codziennie każda osoba spotyka się z k osobami. Zakładamy, że pierwszego dnia jedna osoba zostaje zarażona wirusem Eboli. Na każdą osobę z którą się zetknie zarażona, $c < 1$ się zarazi i od następnego dnia będzie zarażać. Opisz ile osób będzie chorych po 9 dniach, jeśli $k = 5$, $c = 0.3$, $N = 1000$.

Rozwiązanie.

Oznaczmy przez x_j liczbę zarażonych osób (nie przeszkadza nam, że to może być ułamek). Mamy rekurencje

$\square$

Przykład z podstawy

Zadanie

Rozważmy zamkniętą populację w wiosce, gdzie mieszka N osób. Codziennie każda osoba spotyka się z k osobami. Zakładamy, że pierwszego dnia jedna osoba zostaje zarażona wirusem Eboli. Na każdą osobę z którą się zetknie zarażona, $c < 1$ się zarazi i od następnego dnia będzie zarażać. Opisz ile osób będzie chorych po 9 dniach, jeśli $k = 5$, $c = 0.3$, $N = 1000$.

Rozwiązanie.

Oznaczmy przez x_j liczbę zarażonych osób (nie przeszkadza nam, że to może być ułamek). Mamy rekurencje

$$x_{j+1} = x_j + ckx_j \frac{N - x_j}{N}.$$

□

Przykład z podstawy

Zadanie

Rozważmy zamkniętą populację w wiosce, gdzie mieszka N osób. Codziennie każda osoba spotyka się z k osobami. Zakładamy, że pierwszego dnia jedna osoba zostaje zarażona wirusem Eboli. Na każdą osobę z którą się zetknie zarażona, $c < 1$ się zarazi i od następnego dnia będzie zarażać. Opisz ile osób będzie chorych po 9 dniach, jeśli $k = 5$, $c = 0.3$, $N = 1000$.

Rozwiązanie.

Oznaczmy przez x_j liczbę zarażonych osób (nie przeszkadza nam, że to może być ułamek). Mamy rekurencje

$$x_{j+1} = x_j + ckx_j \frac{N - x_j}{N}.$$

Następnie podstawiamy dane liczbowe do wzoru. Wychodzi około 854. □

Komentarze

- Uwaga! Model przewiduje, że następnego dnia będzie chorych 1040 osób a potem liczba będzie malała. To jest niedoskonałość modelu. Niemniej, zawsze w granicy będziemy otrzymywali 1000.

Komentarze

- Uwaga! Model przewiduje, że następnego dnia będzie chorych 1040 osób a potem liczba będzie malała. To jest niedoskonałość modelu. Niemniej, zawsze w granicy będziemy otrzymywali 1000.
- Odpowiada za to fakt, że niektórzy mogą być zarażeni dwukrotnie w ciągu jednego dnia.

Komentarze

- Uwaga! Model przewiduje, że następnego dnia będzie chorych 1040 osób a potem liczba będzie malała. To jest niedoskonałość modelu. Niemniej, zawsze w granicy będziemy otrzymywali 1000.
- Odpowiada za to fakt, że niektórzy mogą być zarażeni dwukrotnie w ciągu jednego dnia.
- Łatwiej jest często pisać $y_j = x_j/N$. Wtedy $y_0 = 1/N$ ale $y_{j+1} = y_j + Dy_j(1 - y_j)$, gdzie D jest parametrem.

Komentarze

- Uwaga! Model przewiduje, że następnego dnia będzie chorych 1040 osób a potem liczba będzie malała. To jest niedoskonałość modelu. Niemniej, zawsze w granicy będziemy otrzymywali 1000.
- Odpowiada za to fakt, że niektórzy mogą być zarażeni dwukrotnie w ciągu jednego dnia.
- Łatwiej jest często pisać $y_j = x_j/N$. Wtedy $y_0 = 1/N$ ale $y_{j+1} = y_j + Dy_j(1 - y_j)$, gdzie D jest parametrem.
- Jeśli mamy tylko N' osób, które mogą być zarażone, to zmniejszamy N do N'. Czyli współczynnik D (szybkość rozprzestrzeniania się choroby) maleje proporcjonalnie.

Zaawansowany przykład

Rozważmy model choroby ze zdrowieniem i odpornością.

- Osoba chora zaraża jak poprzednio.

Zaawansowany przykład

Rozważmy model choroby ze zdrowieniem i odpornością.

- Osoba chora zaraża jak poprzednio.
- Każdego dnia odsetek p osób zdrowieje.

Zaawansowany przykład

Rozważmy model choroby ze zdrowieniem i odpornością.

- Osoba chora zaraża jak poprzednio.
- Każdego dnia odsetek p osób zdrowieje.
- Kto wyzdrowieje, nie zaraża już więcej.

Zaawansowany przykład

Rozważmy model choroby ze zdrowieniem i odpornością.

- Osoba chora zaraża jak poprzednio.
- Każdego dnia odsetek p osób zdrowieje.
- Kto wyzdrowieje, nie zaraża już więcej.

Oznaczenia

Zaawansowany przykład

Rozważmy model choroby ze zdrowieniem i odpornością.

- Osoba chora zaraża jak poprzednio.
- Każdego dnia odsetek p osób zdrowieje.
- Kto wyzdrowieje, nie zaraża już więcej.

Oznaczenia

- m_n: odsetek osób mogących zachorować;

Zaawansowany przykład

Rozważmy model choroby ze zdrowieniem i odpornością.

- Osoba chora zaraża jak poprzednio.
- Każdego dnia odsetek p osób zdrowieje.
- Kto wyzdrowieje, nie zaraża już więcej.

Oznaczenia

- m_n: odsetek osób mogących zachorować;
- c_n: odsetek osób zarażonych

Zaawansowany przykład

Rozważmy model choroby ze zdrowieniem i odpornością.

- Osoba chora zaraża jak poprzednio.
- Każdego dnia odsetek p osób zdrowieje.
- Kto wyzdrowieje, nie zaraża już więcej.

Oznaczenia

- m_n: odsetek osób mogących zachorować;
- c_n: odsetek osób zarażonych
- o_n: odsetek osób odpornych.

Rozważmy model choroby ze zdrowieniem i odpornością.

- Osoba chora zaraża jak poprzednio.
- Każdego dnia odsetek p osób zdrowieje.
- Kto wyzdrowieje, nie zaraża już więcej.

Oznaczenia

- m_n: odsetek osób mogących zachorować;
- c_n: odsetek osób zarażonych
- o_n: odsetek osób odpornych.

- $m_{n+1} = m_n - Dc_n m_n$

Zaawansowany przykład

Rozważmy model choroby ze zdrowieniem i odpornością.

- Osoba chora zaraża jak poprzednio.
- Każdego dnia odsetek p osób zdrowieje.
- Kto wyzdrowieje, nie zaraża już więcej.

Oznaczenia

- m_n: odsetek osób mogących zachorować;
- c_n: odsetek osób zarażonych
- o_n: odsetek osób odpornych.

- $m_{n+1} = m_n - Dc_n m_n$
- $c_{n+1} = (1-p)c_n + Dc_n m_n$

Zaawansowany przykład

Rozważmy model choroby ze zdrowieniem i odpornością.

- Osoba chora zaraża jak poprzednio.
- Każdego dnia odsetek p osób zdrowieje.
- Kto wyzdrowieje, nie zaraża już więcej.

Oznaczenia

- m_n: odsetek osób mogących zachorować;
- c_n: odsetek osób zarażonych
- o_n: odsetek osób odpornych.

- $m_{n+1} = m_n - Dc_n m_n$
- $c_{n+1} = (1-p)c_n + Dc_n m_n$
- $o_{n+1} = o_n + pc_n$.

Implementacja modelu

```
def second_model():
    c=0.01
    o=0.1
    m=1-c-o
    count=0
    while (c>0.0001):
        yield m,c,o,count
        s=0.3*m*c
        z=0.1*c
        o=o+z
        m=m-s
        c=c-z+s
        count=count+1
r=second_model()
for i in r:
    print(i)
```

Wyniki i dyskusja

- Proces kończy się po 135 dniach. $o_{135} = 0.93$, co oznacza 83% populacji chorowało.

- Proces kończy się po 135 dniach. $o_{135} = 0.93$, co oznacza 83% populacji chorowało.
- Od 29. do 35. dnia chorowało ponad 20% populacji.

Wyniki i dyskusja

- Proces kończy się po 135 dniach. $o_{135} = 0.93$, co oznacza 83% populacji chorowało.
- Od 29. do 35. dnia chorowało ponad 20% populacji.
- Zmieniamy o z 0.1 na 0.8.

Wyniki i dyskusja

- Proces kończy się po 135 dniach. $o_{135} = 0.93$, co oznacza 83% populacji chorowało.
- Od 29. do 35. dnia chorowało ponad 20% populacji.
- Zmieniamy o z 0.1 na 0.8.
- Proces kończy się po 85 dniach. $o_{85} = 0.82$. Zachorowało 2% populacji.

Wyniki i dyskusja

- Proces kończy się po 135 dniach. $o_{135} = 0.93$, co oznacza 83% populacji chorowało.
- Od 29. do 35. dnia chorowało ponad 20% populacji.
- Zmieniamy o z 0.1 na 0.8.
- Proces kończy się po 85 dniach. $o_{85} = 0.82$. Zachorowało 2% populacji.
- Ciąg c_n jest malejący.

- Proces kończy się po 135 dniach. $o_{135} = 0.93$, co oznacza 83% populacji chorowało.
- Od 29. do 35. dnia chorowało ponad 20% populacji.
- Zmieniamy o z 0.1 na 0.8.
- Proces kończy się po 85 dniach. $o_{85} = 0.82$. Zachorowało 2% populacji.
- Ciąg c_n jest malejący.

W ten sposób sprawdzamy rozwój epidemii przy danym odsetku populacji mających odporność.

Ciągi. Konsekwencje zapisów

- Definicja ciągu, jeśli w ogóle jest podana, nie jest bowiem niezbędna (funkcja z $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ lub $\mathbb{Z}_{>0}$ do $\mathbb{R}$), nie może przesłaniać reszty działu.

- Definicja ciągu, jeśli w ogóle jest podana, nie jest bowiem niezbędna (funkcja z $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ lub $\mathbb{Z}_{>0}$ do $\mathbb{R}$), nie może przesłaniać reszty działu.
- Duża możliwość korelacji przedmiotowej i przedstawiania ciągu jako dyskretnego modelu rzeczywistości.

Ciągi. Konsekwencje zapisów

- Definicja ciągu, jeśli w ogóle jest podana, nie jest bowiem niezbędna (funkcja z $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ lub $\mathbb{Z}_{>0}$ do $\mathbb{R}$), nie może przesłaniać reszty działu.
- Duża możliwość korelacji przedmiotowej i przedstawiania ciągu jako dyskretnego modelu rzeczywistości.
- Wskazane: Co najmniej jeden przykład mógłby się pojawić w podręczniku, jeden jest w podstawie programowej.

Ciągi. Konsekwencje zapisów

- Definicja ciągu, jeśli w ogóle jest podana, nie jest bowiem niezbędna (funkcja z $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ lub $\mathbb{Z}_{>0}$ do $\mathbb{R}$), nie może przesłaniać reszty działu.
- Duża możliwość korelacji przedmiotowej i przedstawiania ciągu jako dyskretnego modelu rzeczywistości.
- Wskazane: Co najmniej jeden przykład mógłby się pojawić w podręczniku, jeden jest w podstawie programowej.
- Wskazane: Badanie monotoniczności ciągu można skorelować z zastosowaniami, monotoniczność mogłaby mieć przełożenie praktyczne.

Ciągi. Konsekwencje zapisów

- Definicja ciągu, jeśli w ogóle jest podana, nie jest bowiem niezbędna (funkcja z $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ lub $\mathbb{Z}_{>0}$ do $\mathbb{R}$), nie może przesłaniać reszty działu.
- Duża możliwość korelacji przedmiotowej i przedstawiania ciągu jako dyskretnego modelu rzeczywistości.
- Wskazane: Co najmniej jeden przykład mógłby się pojawić w podręczniku, jeden jest w podstawie programowej.
- Wskazane: Badanie monotoniczności ciągu można skorelować z zastosowaniami, monotoniczność mogłaby mieć przełożenie praktyczne.
- Wątpliwe: Nie należy oczekiwać, że uczeń w szkole ponadpodstawowej, nawet na rozszerzeniu, będzie w stanie samodzielnie zbudować model. Samodzielne budowanie modeli w naukach przyrodniczych mogłoby raczej odbywać się w projektach pozalekcyjnych.

Ciągi. Konsekwencje zapisów

- Definicja ciągu, jeśli w ogóle jest podana, nie jest bowiem niezbędna (funkcja z $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ lub $\mathbb{Z}_{>0}$ do $\mathbb{R}$), nie może przesłaniać reszty działu.
- Duża możliwość korelacji przedmiotowej i przedstawiania ciągu jako dyskretnego modelu rzeczywistości.
- Wskazane: Co najmniej jeden przykład mógłby się pojawić w podręczniku, jeden jest w podstawie programowej.
- Wskazane: Badanie monotoniczności ciągu można skorelować z zastosowaniami, monotoniczność mogłaby mieć przełożenie praktyczne.
- Wątpliwe: Nie należy oczekiwać, że uczeń w szkole ponadpodstawowej, nawet na rozszerzeniu, będzie w stanie samodzielnie zbudować model. Samodzielne budowanie modeli w naukach przyrodniczych mogłoby raczej odbywać się w projektach pozalekcyjnych.
- Wątpliwe: Nie należy przeładowywać treści, raczej pokazać, że badanie ciągów ma sens.

Oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{a}$, oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych, a także twierdzenia o trzech ciągach.

- Precyzyjne sformułowanie zapisu.

Oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{a}$, oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych, a także twierdzenia o trzech ciągach.

Twierdzenie o trzech ciągach pozwala na

- Precyzyjne sformułowanie zapisu.
- Twierdzenie jest intuicyjne.

Oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{a}$, oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych, a także twierdzenia o trzech ciągach.

Twierdzenie o trzech ciągach pozwala na

- Precyzyjne sformułowanie zapisu.
- Twierdzenie jest intuicyjne.
- Stosunkowo łatwo zapisać obliczenie prostych granic.

Granice ciągów

Oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{a}$, oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych, a także twierdzenia o trzech ciągach.

Twierdzenie o trzech ciągach pozwala na

- Precyzyjne sformułowanie zapisu.
- Twierdzenie jest intuicyjne.
- Stosunkowo łatwo zapisać obliczenie prostych granic.
- Dowolny stopień trudności. Trudne zadania mogą pojawić się na maturze rozszerzonej, jeśli będzie utrzymany próg zdawalności.

Granice ciągów. Konsekwencja zapisów.

- Wskazane: Niestandardowe zadania na granice;

- Wskazane: Niestandardowe zadania na granice;
- Wskazane: Duża różnorodność, w tym różnorodność stopnia trudności;

Granice ciągów. Konsekwencja zapisów.

- Wskazane: Niestandardowe zadania na granice;
- Wskazane: Duża różnorodność, w tym różnorodność stopnia trudności;
- Wątpliwe: Nadmierne skupianie się na poprawnym zapisie obliczania granic „trywialnych”, takich jak $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+3}{3n^2-4n}$;

- Wskazane: Niestandardowe zadania na granice;
- Wskazane: Duża różnorodność, w tym różnorodność stopnia trudności;
- Wątpliwe: Nadmierne skupianie się na poprawnym zapisie obliczania granic „trywialnych”, takich jak $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+3}{3n^2-4n}$;
- Wątpliwe: Ograniczanie zadań do jednego tricku, na przykład oblicz $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}$;

Granice ciągów. Konsekwencja zapisów.

- Wskazane: Niestandardowe zadania na granice;
- Wskazane: Duża różnorodność, w tym różnorodność stopnia trudności;
- Wątpliwe: Nadmierne skupianie się na poprawnym zapisie obliczania granic „trywialnych”, takich jak $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+3}{3n^2-4n}$;
- Wątpliwe: Ograniczanie zadań do jednego tricku, na przykład oblicz $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}$;
- Wątpliwe: Niski maksymalny stopień trudności.

- Stosuje twierdzenia sinusów i cosinusów;
- rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów);

- Stosuje twierdzenia sinusów i cosinusów;
- rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów);

Cel zmian.

- Stosuje twierdzenia sinusów i cosinusów;
- rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów);

Cel zmian.

- Możliwość dania różnorodnych, łatwych zadań geometrycznych, w tym testowych. Na przykład: dane są boki trójkąta, sprawdzić, czy jest ostrokątny.

- Stosuje twierdzenia sinusów i cosinusów;
- rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów);

Cel zmian.

- Możliwość dania różnorodnych, łatwych zadań geometrycznych, w tym testowych. Na przykład: dane są boki trójkąta, sprawdzić, czy jest ostrokątny.
- twierdzenie sinusów i cosinusów daje pełniejszy obraz geometrii i powiązań z trygonometrią, który może ułatwić rozumienie.

Wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;

Uczniowie, którzy rozwiązują zadania konstrukcyjne, nabywają przez to wprawy w rozwiązywaniu zadań geometrycznych różnego typu, na przykład uczeń z łatwością przyswoi własności okręgów wpisanych w trójkąt czy czworokąt, jeśli potrafi skonstruować te figury. Nauczanie konstrukcji geometrycznych można przeprowadzać w sposób klasyczny, za pomocą linijki i cyrkla, można też używać specjalistycznych programów komputerowych takich jak np. GeoGebra.

- Bardzo trudno zrealizować powyższy punkt podstawy bez konstrukcji.

- Bardzo trudno zrealizować powyższy punkt podstawy bez konstrukcji.
- Z uwagi na różnorodność technik nauczania nie wprowadzono konstrukcji do treści nauczania.

- Bardzo trudno zrealizować powyższy punkt podstawy bez konstrukcji.
- Z uwagi na różnorodność technik nauczania nie wprowadzono konstrukcji do treści nauczania.
- Wskazane: Konstrukcja geometryczna **musi** być zakończona dowodem poprawności.

- Bardzo trudno zrealizować powyższy punkt podstawy bez konstrukcji.
- Z uwagi na różnorodność technik nauczania nie wprowadzono konstrukcji do treści nauczania.
- Wskazane: Konstrukcja geometryczna **musi** być zakończona dowodem poprawności.
- Wskazane: Różne warianty przeprowadzania konstrukcji: linijka+cyrkiel, wskazówki jak to zrobić w programach komputerowych.

- Dowodzenie jest **jedną z najbardziej podstawowych** umiejętności matematycznych.

Geometria. Dowody.

- Dowodzenie jest **jedną z najbardziej podstawowych** umiejętności matematycznych.
- Zadań na dowodzenie musi być odpowiednia ilość.

Geometria. Dowody.

- Dowodzenie jest **jedną z najbardziej podstawowych** umiejętności matematycznych.
- Zadań na dowodzenie musi być odpowiednia ilość.
- Przykładowo rozwiązane zadania na dowodzenie powinny być w miarę możliwości różnorodne.

Geometria. Dowody.

- Dowodzenie jest **jedną z najbardziej podstawowych** umiejętności matematycznych.
- Zadań na dowodzenie musi być odpowiednia ilość.
- Przykładowo rozwiązane zadania na dowodzenie powinny być w miarę możliwości różnorodne.
- W zadaniach na dowodzenie warto pilnować, od czego zacząć.

Geometria. Dowody.

- Dowodzenie jest **jedną z najbardziej podstawowych** umiejętności matematycznych.
- Zadań na dowodzenie musi być odpowiednia ilość.
- Przykładowo rozwiązane zadania na dowodzenie powinny być w miarę możliwości różnorodne.
- W zadaniach na dowodzenie warto pilnować, od czego zacząć.
- Niedopuszczalne: Rozwiązywanie zadań na dowodzenie wychodząc od aksjomatów Euklidesa;

Geometria. Dowody.

- Dowodzenie jest **jedną z najbardziej podstawowych** umiejętności matematycznych.
- Zadań na dowodzenie musi być odpowiednia ilość.
- Przykładowo rozwiązane zadania na dowodzenie powinny być w miarę możliwości różnorodne.
- W zadaniach na dowodzenie warto pilnować, od czego zacząć.
- Niedopuszczalne: Rozwiązywanie zadań na dowodzenie wychodząc od aksjomatów Euklidesa;
- Można wspomnieć, że np. twierdzenia o kątach odpowiadających nie dowodzimy.

Dowody. cd.

- W warunkach realizacji pojawiła się lista dowodów, które uczeń powinien poznać;

Dowody. cd.

- W warunkach realizacji pojawiła się lista dowodów, które uczeń powinien poznać;
- Te dowody powinny znaleźć się w podręcznikach;

Dowody. cd.

- W warunkach realizacji pojawiła się lista dowodów, które uczeń powinien poznać;
- Te dowody powinny znaleźć się w podręcznikach;
- To nie znaczy, że nie mogą pojawić się jeszcze inne dowody;

Dowody. cd.

- W warunkach realizacji pojawiła się lista dowodów, które uczeń powinien poznać;
- Te dowody powinny znaleźć się w podręcznikach;
- To nie znaczy, że nie mogą pojawić się jeszcze inne dowody;
- Należy pilnować poprawności dowodu, jeśli podany jest jeden z przypadków (np. dowód wzoru na pole równoległoboku), to musi zostać zaznaczone.

Dowody. cd.

- W warunkach realizacji pojawiła się lista dowodów, które uczeń powinien poznać;
- Te dowody powinny znaleźć się w podręcznikach;
- To nie znaczy, że nie mogą pojawić się jeszcze inne dowody;
- Należy pilnować poprawności dowodu, jeśli podany jest jeden z przypadków (np. dowód wzoru na pole równoległoboku), to musi zostać zaznaczone.
- Dopuszczalne jest, aby taki dowód pojawił się w podręczniku w formie zadania, ale wskazane wtedy jest podanie wskazówek.

Oblicza wartość oczekiwaną, np. przy ustalaniu wysokości wygranej w prostych grach losowych i loteriach.

Oblicza wartość oczekiwaną, np. przy ustalaniu wysokości wygranej w prostych grach losowych i loteriach.

Zadanie

W sklepie są zwykłe chipsy po 3PLN/paczkę i chipsy z losem po 4PLN/paczkę, które różnią się tym, że w tych drugich jest los, który z prawdopodobieństwem $1/4$ *daje mi drugą paczkę chipsów, ale tym razem tych bez losu. Kupuję chipsy za 24PLN. Ile mogę się spodziewać paczek chipsów gdy kupuję tylko te za 3PLN, a ile gdy kupuję te po 4PLN?*

Oblicza wartość oczekiwaną, np. przy ustalaniu wysokości wygranej w prostych grach losowych i loteriach.

Zadanie

W sklepie są zwykłe chipsy po 3PLN/paczkę i chipsy z losem po 4PLN/paczkę, które różnią się tym, że w tych drugich jest los, który z prawdopodobieństwem $1/4$ *daje mi drugą paczkę chipsów, ale tym razem tych bez losu. Kupuję chipsy za 24PLN. Ile mogę się spodziewać paczek chipsów gdy kupuję tylko te za 3PLN, a ile gdy kupuję te po 4PLN?*

Zadanie

Co gdy dostaję znowu chipsy z losem w środku z prawdopodobieństwem $1/4$*?*

Zadanie

Rzucam kością 10-ścienną. Jeśli wypadnie 10, *rzucam jeszcze raz, aż wypadnie liczba różna od 10. Wynikiem rzutu jest suma wyrzuconych punktów, czyli jak wypadnie* $10, 10, 5$, *to wynikiem jest* 25 *(to jest tzw. rzut premiowany, spotykany w kilku systemach gier fabularnych). Jaki jest średni spodziewany wynik rzutu?*

Zadanie

Rzucam kością 10-ścienną. Jeśli wypadnie 10*, rzucam jeszcze raz, aż wypadnie liczba różna od 10. Wynikiem rzutu jest suma wyrzuconych punktów, czyli jak wypadnie* $10, 10, 5$*, to wynikiem jest* 25 *(to jest tzw. rzut premiowany, spotykany w kilku systemach gier fabularnych). Jaki jest średni spodziewany wynik rzutu?*

Zadanie

Rzucam 4 razy kością sześcienną i odrzucam najniższy wynik (system losowania postaci w starszych wersjach D&D). Jaki jest średni wynik?

Cel wartości oczekiwanej.

Formalnie zdefiniowana wartość oczekiwana jest za trudna na poziom podstawowy.

Cel wartości oczekiwanej.

Formalnie zdefiniowana wartość oczekiwana jest za trudna na poziom podstawowy. To znaczy, nie każdy nauczyciel, nie z każdą klasą jest w stanie tego nauczyć.

Cel wartości oczekiwanej.

Formalnie zdefiniowana wartość oczekiwana jest za trudna na poziom podstawowy. To znaczy, nie każdy nauczyciel, nie z każdą klasą jest w stanie tego nauczyć.

Prawo

Pewne rzeczy związane z ryzykiem da się opisać matematycznie i policzyć.

Dlaczego nie należy przesadzać?

Zadanie

Mój kolega ma dwójkę dzieci. Przychodzę do niego, drzwi otwiera chłopiec. Jakie jest prawdopodobieństwo, że drugim dzieckiem jest dziewczynka? Zakładamy, że chłopcy rodzą się tak samo często jak dziewczynki.

Dlaczego nie należy przesadzać?

Zadanie

Mój kolega ma dwójkę dzieci. Przychodzę do niego, drzwi otwiera chłopiec. Jakie jest prawdopodobieństwo, że drugim dzieckiem jest dziewczynka? Zakładamy, że chłopcy rodzą się tak samo często jak dziewczynki.

Odpowiedzią nie jest $1/2$!

Dlaczego nie należy przesadzać?

Zadanie

Mój kolega ma dwójkę dzieci. Przychodzę do niego, drzwi otwiera chłopiec. Jakie jest prawdopodobieństwo, że drugim dzieckiem jest dziewczynka? Zakładamy, że chłopcy rodzą się tak samo często jak dziewczynki.

Odpowiedzią nie jest $1/2$! Odpowiedź. $2/3$.

Zadanie

Mój kolega ma dwójkę dzieci. Przychodzę do niego, drzwi otwiera chłopiec. Jakie jest prawdopodobieństwo, że drugim dzieckiem jest dziewczynka? Zakładamy, że chłopcy rodzą się tak samo często jak dziewczynki.

Odpowiedź. $2/3$.

To zadanie pokazuje skalę trudności pojęcia prawdopodobieństwa.

Wnioski

- Wskazane: Przykłady na obliczanie spodziewanego zysku na poziomie podstawowym.

Wnioski

- Wskazane: Przykłady na obliczanie spodziewanego zysku na poziomie podstawowym.
- Wątpliwe: Wprowadzanie formalnej definicji wartości oczekiwanej na poziomie podstawowym.

Uczeń rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Uczeń rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

- Łączymy optymalizację z rachunkiem różniczkowym.

Optymalizacja i rachunek różniczkowy

Uczeń rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

- Łączymy optymalizację z rachunkiem różniczkowym.
- Na poziomie podstawowym optymalizujemy funkcje kwadratowe.

Uczeń rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

- Łączymy optymalizację z rachunkiem różniczkowym.
- Na poziomie podstawowym optymalizujemy funkcje kwadratowe.
- Wskazane: Zadania praktyczne, gdzie taka optymalizacja się pojawia.

Optymalizacja i rachunek różniczkowy

Uczeń rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

- Łączymy optymalizację z rachunkiem różniczkowym.
- Na poziomie podstawowym optymalizujemy funkcje kwadratowe.
- Wskazane: Zadania praktyczne, gdzie taka optymalizacja się pojawia.
- Wskazane: Zadania praktyczne, gdzie pojawia się optymalizacja dająca się sprowadzić do optymalizacji kwadratowej, na przykład $\sqrt{x^2+4x+3}$.

Optymalizacja i rachunek różniczkowy

Uczeń rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

- Łączymy optymalizację z rachunkiem różniczkowym.
- Na poziomie podstawowym optymalizujemy funkcje kwadratowe.
- Wskazane: Zadania praktyczne, gdzie taka optymalizacja się pojawia.
- Wskazane: Zadania praktyczne, gdzie pojawia się optymalizacja dająca się sprowadzić do optymalizacji kwadratowej, na przykład $\sqrt{x^2 + 4x + 3}$.
- Wątpliwe: Podawanie optymalizacji jako mało istotnego elementu nauczania na poziomie podstawowym.

Rachunek różniczkowy, poziom rozszerzony

Podstawowym zastosowaniem definicji pochodnej może być wyprowadzenie wzoru na pochodną jednomianu i pochodną sumy, iloczynu i złożenia funkcji (gdy funkcja wewnętrzna jest różnowartościowa). Uczniowie powinni też poznać twierdzenie mówiące, że funkcja ciągła na przedziale i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału jest niemalejąca wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest nieujemna. Ono powinno być podstawą do badania funkcji.

Rachunek różniczkowy, poziom rozszerzony

Podstawowym zastosowaniem definicji pochodnej może być wyprowadzenie wzoru na pochodną jednomianu i pochodną sumy, iloczynu i złożenia funkcji (gdy funkcja wewnętrzna jest różnowartościowa). Uczniowie powinni też poznać twierdzenie mówiące, że funkcja ciągła na przedziale i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału jest niemalejąca wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest nieujemna. Ono powinno być podstawą do badania funkcji.

- Wskazane: Uczeń szuka ekstremów funkcji badając monotoniczność.

Rachunek różniczkowy, poziom rozszerzony

Podstawowym zastosowaniem definicji pochodnej może być wyprowadzenie wzoru na pochodną jednomianu i pochodną sumy, iloczynu i złożenia funkcji (gdy funkcja wewnętrzna jest różnowartościowa). Uczniowie powinni też poznać twierdzenie mówiące, że funkcja ciągła na przedziale i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału jest niemalejąca wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest nieujemna. Ono powinno być podstawą do badania funkcji.

- Wskazane: Uczeń szuka ekstremów funkcji badając monotoniczność.
- Wprowadzenie pojęcia minimum i maksimum lokalnego nie jest konieczne!
- Wskazane: Jeśli jest wprowadzone, to niezbędne są przykłady, że pochodna funkcji zeruje się w jakimś punkcie, ale nie ma w nim ekstremum (x^3 na przedziale $[-1, 1]$).

Rachunek różniczkowy, poziom rozszerzony

Podstawowym zastosowaniem definicji pochodnej może być wyprowadzenie wzoru na pochodną jednomianu i pochodną sumy, iloczynu i złożenia funkcji (gdy funkcja wewnętrzna jest różnowartościowa). Uczniowie powinni też poznać twierdzenie mówiące, że funkcja ciągła na przedziale i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału jest niemalejąca wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest nieujemna. Ono powinno być podstawą do badania funkcji.

- Wskazane: Uczeń szuka ekstremów funkcji badając monotoniczność.
- Wprowadzenie pojęcia minimum i maksimum lokalnego nie jest konieczne!
- Wskazane: Jeśli jest wprowadzone, to niezbędne są przykłady, że pochodna funkcji zeruje się w jakimś punkcie, ale nie ma w nim ekstremum (x^3 na przedziale $[-1, 1]$).
- Wskazane: Jeśli wprowadzamy ekstrema lokalne, to niezbędne są przykłady, że funkcja ma ekstremum lokalne, ale nie jest to absolutne ekstremum ($x^3 - x$ na przedziale $[-2, 2]$).

Rachunek różniczkowy, poziom rozszerzony

Podstawowym zastosowaniem definicji pochodnej może być wyprowadzenie wzoru na pochodną jednomianu i pochodną sumy, iloczynu i złożenia funkcji (gdy funkcja wewnętrzna jest różnowartościowa). Uczniowie powinni też poznać twierdzenie mówiące, że funkcja ciągła na przedziale i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału jest niemalejąca wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest nieujemna. Ono powinno być podstawą do badania funkcji.

- Wskazane: Uczeń szuka ekstremów funkcji badając monotoniczność.
- Wprowadzenie pojęcia minimum i maksimum lokalnego nie jest konieczne!
- Wskazane: Jeśli jest wprowadzone, to niezbędne są przykłady, że pochodna funkcji zeruje się w jakimś punkcie, ale nie ma w nim ekstremum (x^3 na przedziale $[-1, 1]$).
- Wskazane: Jeśli wprowadzamy ekstrema lokalne, to niezbędne są przykłady, że funkcja ma ekstremum lokalne, ale nie jest to absolutne ekstremum ($x^3 - x$ na przedziale $[-2, 2]$).
- Niedopuszczalne: Sprowadzanie szukania ekstremów do mechanicznego

Notacja

Niedopuszczalne: Stosowanie notacji $\mathbb{C}$ na liczby całkowite, $\mathbb{W}$ na liczby wymierne, albo podawanie tej notacji jako równoprawnej.

Notacja

Niedopuszczalne: Stosowanie notacji $\mathbb{C}$ na liczby całkowite, $\mathbb{W}$ na liczby wymierne, albo podawanie tej notacji jako równoprawnej.
Jeśli kogoś razi, że to nie pochodzi od języka polskiego, proponuję rozważyć gra zamiast lim, sty zamiast tg, wyg zamiast sin.