Wykład 8 *Spisał: Krzysztof Gogolewski*

Konstrukcja zygzakowa ekspandera

1 Konstrukcja ekspandera

Będziemy chcieli skonstruować rodziny grafów regularnych $\{G_i\}$ w których

1. stopień $\deg(G_i) = d = \text{const}$,
2. przerwa spektralna $d - \lambda$ we wszystkich grafach jest ograniczona z dołu przez jakąś dodatnią stałą,
3. liczba wierzchołków $|V(G_i)|$ dąży do nieskończoności.

Ekspanderem będziemy nazywać graf będący w takiej rodzinie. Na upartego każdy ustalony spójny graf regularny można nazwać ekspanderem dla odpowiedniego d oraz przerwy spektralnej, ale będzie nam zależało na rodzinach grafów, których te parametry są ograniczone przez stałą niezależną od n.
Ponadto, będziemy chceli pamiętać graf w bardzo efektywny sposób. Chcemy, aby mając identyfikator wierzchołka v (zapisany przy użyciu $O(\log n)$ bitów) oraz numer sąsiada i ($1 \leqslant i \leqslant d$) można było znaleźć szybko wierzchołek w który jest i-tym sąsiadem v, oraz numer sąsiada j taki, że v jest j-tym sąsiadem w. "Szybko" oznacza tutaj czas wielomianowy ze względu na długość zapisu v. Na teraz jest to tylko poboczna dygresja, ale będzie ona potrzebna przy algorytmach działających w ograniczonej pamięci.

2 Metoda probabilistyczna

Ekspandery można uzyskać metodą probabilistyczną: losujemy d-regularny graf, z dużym prawdopodobieństwem będzie to ekspander. Dokładniej, jeżeli $G_{d,n}$ to zbiór wszystkich d-regularnych grafów o n wierzchołkach, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\alpha(\varepsilon)$, że losowy element $G_{d,n}$ spełnia z dużym prawdopodobieństwem
$\forall_{X \subseteq V(G)} . |X| \leqslant \alpha(\varepsilon)|V(G)| \Rightarrow |\Gamma(X)| \geqslant (d-1-\varepsilon)|X|$
gdzie α jest jakąś rozsądną funkcją. Ale taka metoda wymaga zarówno dostępu do źródła bitów losowych jak i pamięci na pamiętanie całego grafu, co nie przydaje się w zastosowaniach.

3 Lemat

Lemat 3.1 (Expander mixing lemma)**.** *Niech* $S, T \subseteq V(G)$*. Wtedy* $\left| |E(S,T)| - \frac{|S| \cdot |T| \cdot d}{n} \right| \leqslant \lambda \sqrt{|S| \cdot |T|}$.

(Można zauważyć, że w losowym grafie wartość oczekiwana $|E(S,T)|$ wynosi $\frac{|S| \cdot |T| \cdot d}{n}$. W ekspanderach nie odbiegamy za bardzo od tej wielkości.)

Dowód. Definiujemy wektory x, y takie że $x_v = \begin{cases} 1 & v \in S \\ 0 & v \notin S \end{cases}$ oraz $y_v = \begin{cases} 1 & v \in T \\ 0 & v \notin T \end{cases}$. Niech $|S| = a$, $|T| = b$.
Widać, że $|E(S,T)| = x^T \cdot A \cdot y$.
Niech $\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{n}}$ będzie wektorem o normie 1. Mamy $\langle \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{n}}, x \rangle = \frac{a}{\sqrt{n}}$ oraz $\langle \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{n}}, y \rangle = \frac{b}{\sqrt{n}}$.
Rozbijmy $x = \frac{a}{n}\mathbf{1} + x^{\perp}$ - rozkład, gdzie $x^{\perp} \perp 1$, i tak samo $y = \frac{b}{n}\mathbf{1} + y^{\perp}$.

Mamy
$|E(S,T)| = x^T \cdot A \cdot y = \left(\frac{a}{n}\mathbf{1} + x^{\perp}\right)^T \cdot A \cdot \left(\frac{b}{n}\mathbf{1} + y^{\perp}\right) =$
$= \left(\frac{a}{n}\mathbf{1}\right)^T \cdot A \cdot \left(\frac{b}{n}\mathbf{1}\right) + \left(\frac{a}{n}\mathbf{1}\right)^T \cdot A \cdot y^{\perp} + (x^{\perp})^T \cdot A \cdot \left(\frac{b}{n}\mathbf{1}\right) + (x^{\perp})^T \cdot A \cdot y^{\perp} =$
[Korzystamy z tego, że $\mathbf{1}$ to wektor własny macierzy A, a wektory $x^{\perp}$ i $y^{\perp}$ są prostopadłe do $\mathbf{1}$]
$= \frac{dab}{n^2}\langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle + \frac{da}{n}\langle \mathbf{1}, y^{\perp}\rangle + \frac{db}{n}\langle x^{\perp}, \mathbf{1}\rangle + (x^{\perp})^T \cdot A \cdot y^{\perp} = \frac{dab}{n} + (x^{\perp})^T \cdot A \cdot y^{\perp} = \frac{d|S||T|}{n} + (x^{\perp})^T \cdot A \cdot y^{\perp}$

Stąd, korzystając z definicji λ oraz nierówności $\langle x^{\perp}, y^{\perp}\rangle \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$,
$\left| |E(S,T)| - \frac{d|S||T|}{n} \right| = |(x^{\perp})^T \cdot A \cdot y^{\perp}| \leqslant \lambda \|x\| \cdot \|y\| = \lambda\sqrt{a \cdot b} = \lambda\sqrt{|S| \cdot |T|}$. □

4 Konstrukcja zygzakowa ekspandera

Załóżmy, że mamy ekspander G o N wierzchołkach i stopniu D, gdzie D jest duże, oraz ekspander H o D wierzchołkach i stopniu d, gdzie d jest małe ($D \gg d^2$). Pokażemy konstrukcję ekspandera o $N \cdot D$ wierzchołkach, stopniu d^2 i niewiele gorszej przerwie spektralnej niż G i H. Dzięki tej konstrukcji możemy (kosztem niewielkiego spadku w przerwie spektralnej) stworzyć ekspander o rozmiarze podobnym do G, ale którego stopień zależy od dużo mniejszego grafu H. (Potem, ten spadek w przerwie spektralnej nadrobimy podnosząc powstały graf do jakiejś potęgi.)
Dokładniej, załóżmy $\lambda(G) = \alpha D$, $\lambda(H) = \beta d$. Pokażemy graf $G ⓩ H$ (zygzak), taki, że
$\lambda(G ⓩ H) \leqslant (\alpha + \beta + \beta^2)d^2$
Przed definicją i dowodem własności grafu $G ⓩ H$, pokażemy jak iloczyn zygzakowy pozwala na konstrukcję rodziny ekspanderów. Skorzystamy z iloczynu kartezjańskiego, tensorowego oraz zygzaka.
Niech $\deg H = d$, $|V| = d^8$ oraz $\lambda(H) \leqslant \frac{d}{5}$ będzie ekspanderem dla pewnej ustalonej stałej d. Definiujemy ciąg grafów rekurencyjnie:
$G_1 = H^2, G_2 = H \times H, G_t = \left(G_{\lceil \frac{t-1}{2} \rceil} \times G_{\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor}\right)^2 ⓩ H$

Twierdzenie 4.1. *Tak zdefiniowane G_t są ekspanderami.*

Dowód. Kolejno:

1. $|V(G_t)| = d^{8t}$:

   Istotnie: $d^{8\lceil \frac{t-1}{2} \rceil} \cdot d^{8\lfloor \frac{t-1}{2} \rfloor} \cdot d^8 = d^{8t}$

2. $\deg(G_t) = d^2$:

   Grafy $G_{\lceil \frac{t-1}{2} \rceil}$ oraz $G_{\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor}$ mają z założenia indukcyjnego stopień d^2, więc ich iloczyn ma stopień d^4, po podniesieniu do kwadratu d^8, po iloczynie zygzakowym z H stopień d^2

3. $\lambda \leqslant \frac{2}{5}d^2$:

   Z założenia G_1 oraz G_2 mają $\lambda = d^2/5$, czyli nawet lepiej niż chcemy (o czynnik 2).

   Graf $G_{\lceil \frac{t-1}{2} \rceil} \times G_{\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor}$ ma $\lambda = 2d^4/5$, po podniesieniu do kwadratu jest to $\frac{4}{25}d^8$. Podstawiając we własności zygzaka $\alpha = \frac{4}{25}$ oraz $\beta = \frac{1}{5}$, $\alpha + \beta + \beta^2 = \frac{4}{25} + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} = \frac{2}{5}$ a więc wynik ma przerwę spektralną $\frac{2}{5}$.

□

5 Definicja zygzaka

Teraz zdefiniujemy i pokażemy własności zygzaka $G \textcircled{z} H$.
Zbiór wierzchołków to iloczyn $V(G \textcircled{z} H) = V(G) \times V(H)$. Możemy myśleć, że graf składa się z $|G|$ chmur, każda chmura zawiera kopię grafu H.
Krawędzie definiujemy następująco: $(v,p) \to (u,q)$ jest krawędzią dla każdej marszruty
$(v,p) \underset{H}{\longrightarrow} (v,r) \to (u,r') \underset{H}{\longrightarrow} (u,q)$
gdzie w pierwszym i trzecim kroku wykonujemy dokładnie jeden krok do sąsiada w grafie H. W drugim kroku z v przechodzimy do jednego z jego D sąsiadów w G, dokładnie do r-tego sąsiada (tj. traktujemy wierzchołek H w parze uporządkowanej jako numer krawędzi którą mamy przejść).
Jeżeli istnieje wiele takich marszrut, krawędź $(v,p) \to (u,q)$ jest wielokrotna.
Innymi słowy: wpierw wykonujemy krok wewnątrz chmury, potem idziemy do sąsiedniej chmury (zależnie od miejsca gdzie jesteśmy w obecnej chmurze) i w nowej chmurze wykonujemy jeden krok.
Widać, że zygzak ma $N \cdot D$ wierzchołków oraz stopień d^2 (marszruta jest wyznaczona przez pierwszy i trzeci krok). Pozostało pokazać, że ekspansja jest zachowana.

Twierdzenie 5.1. *Iloczyn zygzakowy spełnia* $\lambda(G \textcircled{z} H) \leqslant (\alpha + \beta + \beta^2)d^2$

Dowód. Zastanówmy się, jak wygląda macierz indydencji A zygzaka. Niech B_0 będzie macierzą incydencji G, a C_0 będzie macierzą incydencji grafu H. Mamy $A = CBC$, gdzie C odpowiada przejściu wewnątrz chmury: $\begin{pmatrix} C_0 & 0 & & 0 \\ 0 & C_0 & & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & & C_0 \end{pmatrix}$.
Macierz B jest trudniej sobie wyobrazić, ale na pewno jest symetryczną macierzą permutacji.

Weźmy $x \in \mathbb{R}^{ND}$, gdzie $x \perp 1_{\mathrm{ND}}$. Aby obliczyć $\lambda(G \textcircled{z} H)$, pokażemy oszacowanie na $\frac{|\langle Ax, x\rangle|}{\|x\|^2}$.
Rozłóżmy $x = \sum_{v \in G} x_v$, gdzie x_v jest niezerowe tylko na chmurze $\{v\} \times H$. Dalej, rozłóżmy każdy x_v na $x_v = x_v^{\parallel} + x_v^{\perp}$ (gdzie prostopadłość oznacza prostopadłość do wektora $1_{D,v}$ składającego się z jedynek na chmurze $\{v\} \times H$). Mamy, że $x_v^{\parallel}$ jest wielokrotnością $1_{D,v}$; niech y_v będzie liczbą taką, że $x_v^{\parallel} = y_v 1_{D,v}$.
Niech $x^{\parallel} = \sum x_v^{\parallel}$ oraz $x^{\perp} = \sum x_v^{\perp}$. Ponieważ $x^{\perp}$ jest prostopadły do każdego wektora $1_{D,v}$, jest też prostopadły do wektora jedynek 1_{ND}. Skoro x oraz $x^{\perp}$ są prostopadłe do 1_{ND}, to ich różnica $x^{\parallel} = (\underbrace{y_1, y_1, \dots, y_1}_{D}, \dots, \underbrace{y_n, y_n, \dots, y_n}_{D})$ również jest prostopadła do 1_{ND}. Stąd, wektor $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ jest prostopadły do 1_N.

Mamy
$|\langle Ax, x\rangle| = |\langle BCx, Cx\rangle| =$ [bo C jest symetryczna]
$= |\langle BC(x^{\parallel} + x^{\perp}), C(x^{\parallel} + x^{\perp})\rangle| \leqslant$
$\leqslant |\langle BCx^{\parallel}, Cx^{\parallel}\rangle| + |\langle BCx^{\perp}, Cx^{\parallel}\rangle| + |\langle BCx^{\parallel}, Cx^{\perp}\rangle| + |\langle BCx^{\perp}, Cx^{\perp}\rangle|$
[Korzystamy z tego, że $x^{\parallel}$ jest wektorem własnym C, oraz $\|Ba\| = \|a\|$ bo B to macierz permutacji.]
$\leqslant d^2|\langle Bx^{\parallel}, x^{\parallel}\rangle| + d\|BCx^{\perp}\| \cdot \|x^{\parallel}\| + d\|Bx^{\parallel}\| \cdot \|Cx^{\perp}\| + \|BCx^{\perp}\| \cdot \|Cx^{\perp}\| \leqslant$
$\leqslant d^2|\langle Bx^{\parallel}, x^{\parallel}\rangle| + \beta d^2\|x^{\perp}\| \cdot \|x^{\parallel}\| + \beta d^2\|x^{\parallel}\| \cdot \|x^{\perp}\| + \beta^2 d^2\|x^{\perp}\|^2$

Szacujemy pierwszy składnik.

$|\langle Bx^{\parallel}, x^{\parallel}\rangle| = \left|\sum_{v\in V(G), p\in V(H)} y_v y_{\mathrm{pojdz}(v,p)}\right| = \left|\sum_{v\in V(G)} y_v \sum_{w\in N_G(v)} y_w\right| =$
$= \left|\sum_{v\in V(G)} y_v \cdot (B_0 y)_v\right| = |\langle B_0 y, y\rangle| \leqslant \alpha D \frac{\|x^{\parallel}\|^2}{D} = \alpha \|x^{\parallel}\|^2$

gdzie w ostatniej nierówności wykorzystaliśmy to, że $y \perp 1_N$.
Wstawmy teraz to do oszacowania na $|\langle Ax, x\rangle|$:
$|\langle Ax, x\rangle| \leqslant d^2(\alpha\|x^{\parallel}\|^2 + \beta \cdot 2\|x^{\parallel}\| \cdot \|x^{\perp}\| + \beta^2\|x^{\perp}\|^2) \leqslant d^2\|x\|^2(\alpha + \beta + \beta^2)$
gdzie ostatnia nierówność wynika z $\|x^{\perp}\| \cdot \|x^{\parallel}\| \leqslant \frac{\|x^{\perp}\|^2 + \|x^{\parallel}\|^2}{2} = \frac{\|x\|^2}{2}$. □

Znane są inne wyniki dotyczące przerwy spektralnej w iloczynie zygzakowym. Wiadomo, że $\frac{d^2 - \lambda(G \textcircled{z} H)}{d^2} \geqslant \frac{1-\beta^2}{2} \cdot \alpha$. To oszacowanie można używać w grafach w których α i β są bliskie 1 (twierdzenie 5.1 w tym przypadku niczego nie daje).