Wykład 7 (26.04.2013)	Opracował: Przemysław Wenus

Wstęp do ekspanderów

Uwaga 1. W teorii ekspanderów będziemy rozważali multigrafy, to jest grafy, w których dopuszczamy istnienie wielokrotnych krawędzi i pętli. Ponadto głównym obiektem badań będą multigrafy d-regularne. To jest takie, że każdy wierzchołek ma dokładnie d incydentnych z nim krawędzi licząc z krotnościami (jedna pętla to jedna krawędź).

Definicja 1. Niech $E(S, \overline{S})$ dla $S \subseteq V(G)$ oznacza zbiór krawędzi pomiędzy zbiorem S i jego dopełnieniem $\overline{S}$. *Ekspansją krawędziową* grafu G nazywamy liczbę:

$$h^E(G) = \min \left\{ \frac{|E(S, \overline{S})|}{|S|} : S \subseteq V(G), |S| \leqslant \frac{|V(G)|}{2} \right\}$$

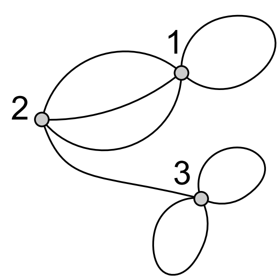
Spostrzeżenie 1.

$$0 \leqslant h^E(G) \leqslant \operatorname{maxdeg}(G)$$

Dowód. Nieujemność jest oczywista. Z każdego wierzchołka dowolnego zbioru S nie wychodzi więcej krawędzi niż $\operatorname{maxdeg}(G)$, zatem $|E(S, \overline{S})| \leqslant \operatorname{maxdeg}(G)|S|$. □

Definicja 2. Macierzą sąsiedztwa multigrafu G o zbiorze wierzchołków $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$ będziemy nazywali macierz $A(G) = [a_{ij}]$ gdzie a_{ij} to krotność krawędzi pomiędzy wierzchołkiem i, a wierzchołkiem j.

Przykład:



$$A(G) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Uwaga 2. Macierz sąsiedztwa jest macierzą symetryczną, zatem jej wartości własne są liczbami rzeczywistymi, oraz można dobrać tak wektory własne, aby były one parami prostopadłe. Przyjmujemy umownie, że wartości własne są uporządkowane nierosnąco $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$.

Uwaga 3. Na wektory można patrzeć jak na pewne etykietowanie wierzchołków liczbami rzeczywistymi. Wynikiem mnożenia macierzy sąsiedztwa A przez wektor x będzie wektor, który na i-tej współrzędnej ma sumę tego co widzi w sąsiedztwie i-ty wierzchołek w tym etykietowaniu (sąsiedzi połączeni krawędziami wielokrotnymi do sumy liczą się kilka razy). Innymi słowy, jeśli za $N(i)$ przyjmiemy multizbiór sąsiadów wierzchołka i wraz z krotnościami, to:

$$(Ax)_i = \sum_j a_{ij} x_j = \sum_{j \in N(i)} x_j$$

Spostrzeżenie 2. *Dla multigrafu d-regularnego G mamy $\lambda_1(G) = d$ i $\lambda_n(G) \geqslant -d$.*

Dowód. Niech x będzie dowolnym wektorem własnym macierzy $A = A(G)$ odpowiadającym wartości własnej λ. Ponadto niech i_0 będzie indeksem, dla którego $|x_{i_0}| = \max_i |x_i|$.

$$|(Ax)_{i_0}| \leqslant \sum_{j \in N(i_0)} |x_j| \leqslant \sum_{j \in N(i_0)} |x_{i_0}| = |N(i_0)||x_{i_0}| = d|x_{i_0}|$$

Z drugiej strony $|(Ax)_{i_0}| = |\lambda||x_{i_0}|$. Czyli moduł dowolnej wartości własnej λ nie przekracza d. Zatem $d \geqslant \lambda_1 \geqslant \lambda_n \geqslant -d$.

Aby pokazać, że $\lambda_1 = d$ wystarczy zauważyć, że dla wektora $\overrightarrow{1} = (1, 1, \ldots, 1)$ mamy $(A\overrightarrow{1})_i = \sum_{j \in N(i)} 1 = d$, co oznacza, że d jest wartością własną odpowiadającą wektorowi $\overrightarrow{1}$. □

Uwaga 4. Od tej pory G będzie oznaczać multigraf d-regularny o zbiorze wierzchołków $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$. Ponadto A będzie oznaczać macierz sąsiedztwa multigrafu G.

Definicja 3. Niech $\lambda = \max\{|\lambda_2|, |\lambda_n|\}$. *Bezwzględną przerwą spektralną* multigrafu d-regularnego nazywamy liczbę $d - \lambda$. *Względną przerwą spektralną* multigrafu d-regularnego nazywamy liczbę $d - \lambda_2$

Uwaga 5.

$$\lambda_2 = \max_{x \perp \overrightarrow{1}} \frac{x^T A x}{||x||^2} \qquad \lambda = \max_{x \perp \overrightarrow{1}} \frac{||Ax||}{||x||}$$

Dowód. Jest to wniosek z teorii wartości własnych i wektorów własnych z algebry liniowej (patrz powtórzenie na stronie). □

Rozważmy błądzenie losowe po wierzchołkach d-regularnego grafu G, czyli proces, w którym startujemy z jakiegoś wierzchołka, losowo wybieramy sąsiada i idziemy do tego sąsiada i tak dalej. Niech p_0 będzie rozkładem prawdopodobieństwa tego gdzie się na początku znajdujemy, np. $p_0 = (1, 0, \ldots, 0)$ jeśli startujemy z wierzchołka o numerze 1. Jeżeli potraktujemy p_0 jak wektor, to rozkład prawdopodobieństwa tego gdzie się znajdujemy po jednym kroku wyraża się wzorem:

$$p_1 = \left(\frac{A}{d}\right) p_0$$

i podobnie po k krokach

$$p_k = \left(\frac{A}{d}\right)^k p_0$$

Wektor p_0 możemy teraz rozbić na część prostopadłą i równoległą do $\overrightarrow{1}$:

$$p_0 = p_0^{\perp} + \frac{\overrightarrow{1}}{n}$$

i skorzystać z tego, że $\overrightarrow{1}$ jest wektorem własnym macierzy A/d odpowiadającym wartości własnej 1

$$p_k = \left(\frac{A}{d}\right)^k p_0 = \left(\frac{A}{d}\right)^k p_0^{\perp} + \left(\frac{A}{d}\right)^k \frac{\overrightarrow{1}}{n} = \left(\frac{A}{d}\right)^k p_0^{\perp} + \frac{\overrightarrow{1}}{n}$$

Wektor $p_0^\perp$ należy do tej podprzestrzeni, w której wartości własne są co do modułu nie większe niż λ, więc

$$\left\| \left(\frac{A}{d}\right)^k p_0^\perp \right\| \leqslant ||p_0^\perp|| \left(\frac{\lambda}{d}\right)^k$$

Czyli jeśli bezwzględna przerwa spektralna jest niezerowa to rozkład prawdopodobieństwa p_k dość szybko zbiega do $\frac{\overrightarrow{1}}{n}$.

Kolejne lematy pokazują związek między względną przerwą spektralna, a ekspansją krawędziową multigrafu G.

Lemat 1. *Dla multigrafu d-regularnego* $h^E(G) \geqslant \frac{d-\lambda_2}{2}$

Dowód. Niech $S \subseteq V(G)$ będzie zbiorem, dla którego $|S| \leqslant \frac{n}{2}$ i $h^E(G) = \frac{|E(S,\overline{S})|}{|S|}$. Oznaczmy przez $a = |S|$, $b = |\overline{S}| = n - a$, $e = |E(S, \overline{S})|$ i rozważmy wektor $x = (x_i)_{i=1}^n$

$$x_i = \begin{cases} b & \text{dla } i \in S \\ -a & \text{dla } i \in \overline{S} \end{cases}$$

Wektor ten jest prostopadły do $\overrightarrow{1}$, bo $\langle x, \overrightarrow{1} \rangle = |S|b + |\overline{S}|(-a) = ab - ba = 0$.

$$x^T Ax = \sum_{i,j} x_i a_{ij} x_j = \sum_{i,j\in S} x_i a_{ij} x_j + \sum_{i,j\in\overline{S}} x_i a_{ij} x_j + \sum_{i\in S, j\in\overline{S}} x_i a_{ij} x_j + \sum_{i\in\overline{S}, j\in S} x_i a_{ij} x_j =$$

$$b^2 \sum_{i,j\in S} a_{ij} + (-a)^2 \sum_{i,j\in\overline{S}} a_{ij} + b(-a) \sum_{i\in S, j\in\overline{S}} a_{ij} + (-a)b \sum_{i\in\overline{S}, j\in S} a_{ij}$$

Zauważmy teraz, że

$$\sum_{i\in S, j\in\overline{S}} a_{ij} = \sum_{i\in\overline{S}, j\in S} a_{ij} = |E(S, \overline{S})| = e$$

$$\sum_{i\in S, j\in S} a_{ij} = \sum_{i\in S} \sum_{j\in V(G)} a_{ij} - \sum_{i\in S, j\in\overline{S}} a_{ij} = \sum_{i\in S} d - |E(S, \overline{S})| = da - e$$

$$\sum_{i\in\overline{S}, j\in\overline{S}} a_{ij} = \sum_{i\in\overline{S}} \sum_{j\in V(G)} a_{ij} - \sum_{i\in\overline{S}, j\in S} a_{ij} = \sum_{i\in\overline{S}} d - |E(S, \overline{S})| = db - e$$

czyli

$$x^T Ax = (da - e)b^2 + (db - e)a^2 - 2abe = dab(a + b) - e(a + b)^2$$

Ponadto norma wektora x do kwadratu wynosi:

$$||x||^2 = ab^2 + b(-a)^2 = ab(a + b)$$

Zatem

$$\lambda_2 \geqslant \frac{x^T Ax}{||x||^2} = d - \frac{e}{a}\frac{a+b}{b}$$

Ponieważ $\frac{a+b}{b} \leqslant 2$ i $\frac{e}{a} = h^E(G)$, to

$$\lambda_2 \geqslant d - \frac{e}{a}\frac{a+b}{b} \geqslant d - 2h^E(G)$$

Czyli ostatecznie $h^E(G) \geqslant \frac{d-\lambda_2}{2}$. $\square$

Lemat 2. *Dla multigrafu d-regularnego* $h^E(G) \leqslant \sqrt{2d(d-\lambda_2)}$

Dowód. Niech $\widetilde{x}$ będzie wektorem własnym odpowiadającym λ_2. Możemy założyć, że $|i : \widetilde{x}_i > 0| \leqslant \frac{n}{2}$, bo inaczej moglibyśmy wziąć wektor $-\widetilde{x}$. Rozważmy teraz $x = (x_i)_{i=1}^n$

$$x_i = \begin{cases} \widetilde{x}_i & \text{jeśli } \widetilde{x}_i > 0 \\ 0 & \text{jeśli } \widetilde{x}_i \leqslant 0 \end{cases}$$

Dla ułatwienia możemy przenumerować wierzchołki w taki sposób, aby $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$. Tak więc $x_i = 0$ dla $i > \frac{n}{2}$. Oznaczmy przez $S_i = \{1, 2, \ldots, i\}$ i rozważmy teraz następujące wyrażenie:

$$B = \sum_{ij \in E(G)} |x_i^2 - x_j^2| = \sum_{\substack{i<j \\ ij \in E(G)}} (x_i^2 - x_j^2) = \sum_{\substack{i<j \\ ij \in E(G)}} (x_i^2 - x_{i+1}^2) + (x_{i+1}^2 - x_{i+2}^2) + \ldots + (x_{j-1}^2 - x_j^2)$$

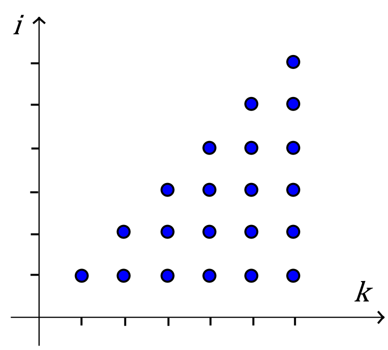
W takiej sumie nawias postaci $(x_k^2 - x_{k+1}^2)$ pojawia się dokładnie raz za każdą krawędź $ij \in E(G)$ dla $i \leqslant k < j$, czyli za krawędź ze zbioru $E(S_k, \overline{S_k})$. Zatem

$$B = \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 - x_{k+1}^2) |E(S_k, \overline{S_k})|$$

$|E(S_k, \overline{S_k})| \geqslant k h^E(G)$ dla $k \leqslant \frac{n}{2}$, a więc pamiętając o tym, że $x_k = 0$ dla $k > \frac{n}{2}$ możemy napisać:

$$\begin{aligned} B = &\sum_{k=1}^{n} (x_k^2 - x_{k+1}^2) |E(S_k, \overline{S_k})| \geqslant \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 - x_{k+1}^2) k h^E(G) = h^E(G) \sum_{k=1}^{n} k (x_k^2 - x_{k+1}^2) = \\ =&h^E(G) \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} (x_k^2 - x_{k+1}^2) = h^E(G) \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} (x_k^2 - x_{k+1}^2) = h^E(G) \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - x_n^2) = \\ &h^E(G) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = h^E(G) ||x||^2 \end{aligned}$$

Poprawność zmiany kolejności sumowania $\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} c_{ik} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} c_{ik}$ można zweryfikować na rysunku poniżej:



Podsumowując nierówności, dostaliśmy:

$$B \geqslant h^E(G) ||x||^2$$

z drugiej strony z nierówności Cauchy'ego-Schwarza mamy:

$$B = \sum_{ij \in E(G)} |x_i - x_j||x_i + x_j| \leqslant \underbrace{\sqrt{\sum_{ij \in E(G)} (x_i - x_j)^2}}_{B_1} \underbrace{\sqrt{\sum_{ij \in E(G)} (x_i + x_j)^2}}_{B_2}$$

Ponieważ $(x_i + x_j)^2 \leqslant 2x_i^2 + 2x_j^2$, to:

$$B_2 \leqslant \sqrt{\sum_{ij \in E(G)} (2x_i^2 + 2x_j^2)}$$

Składnik $2x_i^2$ w sumie pojawia się dokładnie raz za każdą krawędź incydentną z wierzchołkiem i, zatem składnik ten liczony jest d razy.

$$B_2 \leqslant \sqrt{\sum_{ij \in E(G)} (2x_i^2 + 2x_j^2)} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d(2x_i^2)} = \sqrt{2d \sum_{i=1}^{n} x_i^2} = ||x||\sqrt{2d}$$

Aby ograniczyć B_1 zauważmy najpierw, że wektor x, macierz A i wektor $x - \widetilde{x}$ mają same nieujemne wyrazy, zatem $x^T A(x - \widetilde{x}) \geqslant 0$, czyli $x^T Ax \geqslant x^T A\widetilde{x} = x^T \lambda_2 \widetilde{x} = \lambda_2 x^T \widetilde{x} = \lambda_2 x^T x = \lambda_2 ||x||^2$. Przedostatnia równość bierze się stąd, że w sumie $x^T \widetilde{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \widetilde{x}_i$ tam gdzie $\widetilde{x}_i \neq x_i$ iloczyn $x_i \widetilde{x}_i = 0$.

$$B_1 = \sqrt{\sum_{ij \in E(G)} (x_i - x_j)^2} = \sqrt{\sum_{ij \in E(G)} (x_i^2 + x_j^2) - 2 \sum_{ij \in E(G)} x_i x_j}$$

Na podobnej zasadzie co poprzednio $\sum_{ij \in E(G)} (x_i^2 + x_j^2) = d||x||^2$, a ponieważ $2 \sum_{ij \in E(G)} x_i x_j = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j = x^T Ax \geqslant \lambda_2 ||x||^2$, to:

$$B_1 = \sqrt{\sum_{ij \in E(G)} (x_i^2 + x_j^2) - 2 \sum_{ij \in E(G)} x_i x_j} = \sqrt{d||x||^2 - x^T Ax} \leqslant \sqrt{d||x||^2 - \lambda_2 ||x||^2} = ||x||\sqrt{d - \lambda_2}$$

Podsumowując:

$$h^E(G)||x||^2 \leqslant B = B_1 B_2 \leqslant ||x||\sqrt{2d}||x||\sqrt{d - \lambda_2} = ||x||^2 \sqrt{2d(d - \lambda_2)}$$

Ponieważ wektor $\widetilde{x} \neq 0$ jest prostopadły do $\overrightarrow{1}$, to ma zarówno dodatnie i ujemne współrzędne, zatem $||x||^2 \neq 0$ czyli

$$h^E(G) \leqslant \sqrt{2d(d - \lambda_2)}$$

$\square$

Definicja 4. Niech $\Gamma(S) = \{v \in V(G) : (\exists_{u \in S}) uv \in E(G)\}$. *Ekspansją wierzchołkową* multigrafu G nazywamy liczbę:

$$h^V(G) = \min \left\{ \frac{|\Gamma(S)| - |S|}{|S|} : S \subseteq V(G), |S| \leqslant \frac{|V(G)|}{2} \right\}$$

Spostrzeżenie 3. *W multigrafie d-regularnym $|S| \leqslant |\Gamma(S)|$, więc $h^V(G) \geqslant 0$.*

Dowód. Jest $d|S|$ takich krawędzi, że przynajmniej jeden koniec jest w S. W każdym z wierzchołków z $\Gamma(S)$ zbiega się najwyżej d takich krawędzi, zatem wierzchołków z $\Gamma(S)$ musi być więcej niż w S. □

Lemat 3. *Dla multigrafu d-regularnego $h^V(G) \geqslant \frac{d^2-\lambda^2}{d^2+\lambda^2}$*

Dowód. Niech $S \subseteq V(G)$ będzie zbiorem, dla którego $|S| \leqslant \frac{n}{2}$ i $h^V(G) = \frac{|\Gamma(S)|-|S|}{|S|}$. Oznaczmy przez $a = |S|$ i dla danego wektora $v = (v_i)_{i=1}^n$ niech $\mathrm{supp}(v) = \{i : v_i \neq 0\}$. Rozważmy wektor $x = (x_i)_{i=1}^n$

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{dla } i \in S \\ 0 & \text{dla } i \in \overline{S} \end{cases}$$

Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza mamy:

$$\sum_{i=1}^n (Ax)_i = \sum_{i \in \mathrm{supp}(Ax)} (Ax)_i \cdot 1 \leqslant \sqrt{\sum_{i \in \mathrm{supp}(Ax)} {(Ax)_i}^2} \sqrt{\sum_{i \in \mathrm{supp}(Ax)} 1^2} \leqslant ||Ax|| \sqrt{|\mathrm{supp}(Ax)|}$$

$\mathrm{supp}(Ax)$ to zbiór tych wierzchołków, które w sąsiedztwie widzą jakąś jedynkę w etykietowaniu odpowiadającym wektorowi x, czyli $\mathrm{supp}(Ax) = \Gamma(S)$. Z drugiej strony $\sum_{i=1}^n (Ax)_i = d|S| = da$, bo każda jedynka z x zwiększa o 1 to co widzi d wierzchołków na około.

$$da = \sum_{i=1}^n (Ax)_i \leqslant ||Ax|| \sqrt{|\Gamma(S)|}$$

$$\frac{(da)^2}{|\Gamma(S)|} \leqslant ||Ax||^2$$

Skorzystajmy teraz z $\lambda = \max_{x \perp \overrightarrow{1}} \frac{||Ax||}{||x||}$ i rozbijmy wektor x na część $x^\perp$ prostopadłą do $\overrightarrow{1}$ i część $x^\parallel$ równoległą do $\overrightarrow{1}$.

$$x^\parallel = \langle x, \frac{\overrightarrow{1}}{\sqrt{n}} \rangle \frac{\overrightarrow{1}}{\sqrt{n}} = \frac{a}{\sqrt{n}} \frac{\overrightarrow{1}}{\sqrt{n}} = \frac{a}{n} \overrightarrow{1}$$

$$x^\perp = x - x^\parallel = x - \frac{a}{n} \overrightarrow{1}$$

Ponieważ wektor $x^\parallel$ jest wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej d, to:

$$||Ax||^2 = ||Ax^\perp + Ax^\parallel||^2 = ||Ax^\perp + dx^\parallel||^2$$

Wektory $Ax^\perp$ i $dx^\parallel$ są prostopadłe, bo $\langle Ax^\perp, dx^\parallel \rangle = \langle x^\perp, A^T dx^\parallel \rangle = \langle x^\perp, Adx^\parallel \rangle = \langle x^\perp, d^2 x^\parallel \rangle = 0$. Więc z twierdzenia Pitagorasa oraz faktu $\lambda = \max_{x \perp \overrightarrow{1}} \frac{||Ax||}{||x||}$ mamy:

$$||Ax||^2 = ||Ax^\perp + dx^\parallel|| = ||Ax^\perp||^2 + ||dx^\parallel||^2 \leqslant \lambda^2 ||x^\perp||^2 + d^2 ||x^\parallel||^2$$

Policzmy odpowiednie kwadraty norm:

$$a = ||x||^2 = ||x^\perp||^2 + ||x^\parallel||^2 = ||x^\perp||^2 + ||\frac{a}{n} \overrightarrow{1}||^2 = ||x^\perp||^2 + \frac{a^2}{n^2} n = ||x^\perp||^2 + \frac{a^2}{n}$$

$$||x^{\perp}||^2 = a - \frac{a^2}{n}$$

Czyli

$$\frac{(da)^2}{|\Gamma(S)|} \leqslant ||Ax||^2 \leqslant \lambda^2||x^{\perp}|| + d^2||x^{\parallel}|| = \lambda^2(a - \frac{a^2}{n}) + d^2\frac{a^2}{n} = (d^2 - \lambda^2)\frac{a^2}{n} + \lambda^2 a$$

Ponieważ $n \geqslant 2a$, to:

$$\frac{(da)^2}{|\Gamma(S)|} \leqslant (d^2 - \lambda^2)\frac{a^2}{n} + \lambda^2 a \leqslant (d^2 - \lambda^2)\frac{a^2}{2a} + \lambda^2 a = \frac{a}{2}d^2 + \frac{a}{2}\lambda^2$$

czyli po przekształceniach

$$\frac{\Gamma(S)}{a} \geqslant \frac{2d^2}{d^2 + \lambda^2}$$

co daje

$$h^V(G) = \frac{\Gamma(S) - a}{a} = \frac{\Gamma(S)}{a} - 1 \geqslant \frac{d^2 - \lambda^2}{d^2 + \lambda^2}$$

$\square$

Lemat 4. *Dla grafu d-regularnego* $\lambda \leqslant \sqrt{d^2 - \frac{(h^V(G))^2}{8+4(h^V(G))^2}}$

Uwaga 6. Dla dowolnego zbioru S zachodzi $|\Gamma(S)| - |S| \leqslant |\Gamma(S) \backslash S| \leqslant |E(S, \overline{S})|$, czyli

$$h^V(G) \leqslant h^E(G)$$

Zdefiniujmy kwadrat multigrafu G^2 jako multigraf którego macierz sąsiedztwa $A(G^2) = (A(G))^2$. Innymi słowy $ij \in E(G^2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy z wierzchołka i do wierzchołka j można przejść w dokładnie dwóch krokach w G. Wartości własne macierzy $(A(G))^2$ to kwadraty wartości własnych $A(G)$, zatem $\lambda_2(G^2) = \lambda(G^2) = \lambda^2(G)$. Jeżeli G jest d-regularny, to G^2 jest d^2-regularny. Zauważmy też, że $\Gamma_{G^2}(S) = \Gamma_G(\Gamma_G(S)) \supseteq \Gamma_G(T)$ dla $T \subseteq \Gamma_G(S)$, $|T| = |S|$. Zatem dla każdego S:

$$\frac{|\Gamma_{G^2}(S)| - |S|}{|S|} \geqslant \frac{|\Gamma_G(T)| - |T|}{|T|} \geqslant h^V(G)$$

Czyli:

$$h^V(G^2) \geqslant h^V(G)$$

Z powyższych uwag i lematu 2 wynika, że

$$h^V(G) \leqslant h^V(G^2) \leqslant h^E(G^2) \leqslant \sqrt{2d^2(d^2 - \lambda^2(G))}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób nierówność mówiącą (podobnie jak ta z lematu 4), że jeśli h^V jest duże, to $d - \lambda$ też musi być duże. Otrzymana nierówność jest słabsza niż ta z lematu 4, ale prostsza w dowodzie.