Wykład 6 (12.04.2013) Opracował: Krzysztof Węsek

Kolorowanie grafów planarnych, discharging

1 Przykłady dischargingu

Standardowo będziemy oznaczać dla grafu G i jego rysunku planarnego (graf i rysunek będzie klarowny z kontekstu): przez F zbiór ścian, przez f liczbę ścian, $m = |E(G)|$, $n = |V(G)|$.

Lemat 1. *Jeśli graf G jest planarny, to istnieje $v \in V(G)$ taki, że $\deg(v) \leqslant 5$.*

Dowód pierwszy. Ustalmy planarny rysunek G. Ponieważ każda ścian ma co najmniej 3 krawędzie, a każda krawędź wlicza się do długości dwóch ścian, więc mamy:

$$3f \leqslant \sum_{s\text{ - ściana}} \text{len}(F) = 2m$$

Wobec tego zachodzi $f \leqslant \frac{2}{3}m$, a więc korzystając z formuły Eulera $n \geqslant \frac{1}{3}m + 2$, czyli $6n - 12 \geqslant 2m$. Zatem:

$$n \cdot \text{avgdeg}(G) = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2m \leqslant 6n - 12$$

a co za tym idzie

$$\text{avgdeg}(G) \leqslant \frac{6n - 12}{n}.$$

Z czego wynika, że w G istnieje wierzchołek o stopniu mniejszym niż 6, czyli co najwyżej 5. □

Dowód drugi. Użyjemy metody dischargingu. Początkowe ładunki przy ustalonym rysunku G:

- wierzchołek $\longmapsto 6$
- ściana $\longmapsto 6$
- krawędź $\longmapsto -6$

Ze wzoru Eulera mamy (przy oznaczeniach jak wcześniej): $6n + 6f - 6m = 12$, a więc suma rozdanych ładunków to 12. Teraz następują przemieszczenia:

- ściana rozdaje po równo przylegającym krawędziom
- wierzchołek rozdaje po 1 incydentnym krawędziom

Po tych operacjach każda ściana ma ładunek 0, zaś krawędź nie więcej niż $0 = -6 + 2 + 2 \cdot 2$ (bo ma dwa incydentne wierzchołki dające po 1 i dwie przylegające ściany dające co najwyżej po 2). Z kolei wierzchołki o stopniu co najmniej 6 mają ładunek nie większy od 0. Skoro suma ładunków jest dodatnia, to musi istnieć wierzchołek o stopniu co najwyżej 5 (pozostałe wierzchołki, wszystkie krawędzie i ściany nie mają dodatniego ładunku). □

Twierdzenie 2. *Niech G będzie grafem planarnym oraz mindeg$(G) \geqslant 3$. Wtedy dla każdego planarnego rysunku G istnieje $v \in V(G)$ i przyległa do niego ściana s takie, że:*

$$len(s) + \deg(v) \leqslant 8.$$

Dowód. Użyjemy metody dishargingu. Ustalmy rysunek G. Początkowe ładunki:

- wierzchołek $v \longmapsto 3(4 - \deg(v))$
- ściana $s \longmapsto 3(4 - \text{len}(s))$

Ogółem rozdaliśmy ładunków: $\sum_{v \in V}(12 - 3\deg(v)) + \sum_{s \in F}(12 - 3\text{len}(s))$. Stąd wzór Eulera daje nam:

$$12n + 12f - 6m - 6m = 24$$

Dalej dokonujemy przesunięć:

- wierzchołek o stopniu 3 oddaje po 1 do każdej przyległej ściany
- ściana o długości 3 oddaje po 1 do każdego przyległego wierzchołka

Zauważmy, że dla ściany s przy len$(s) \geqslant 6$ zachodzi: nawet jeśli wszystkie przylegające do s wierzchołki oddawały ładunki przylegającym ścianom, to s ma niedodatni ładunek:

$$12 - 3\text{len}(s) + \text{len}(s) = 12 - 2\text{len}(s) \leqslant 0$$

Z kolei dla wierzchołka v przy $\deg(v) \geqslant 6$ zachodzi: nawet jeśli wszystkie przylegające do v ściany oddawały ładunki, to v ma niedodatni ładunek:

$$12 - 3\deg(v) + \deg(v) = 12 - 2\deg(v) \leqslant 0$$

Musi istnieć wierzchołek lub ściana o dodatnim ładunku. Załóżmy, że istnieje taka ściana s, musi zachodzić len$(s) \leqslant 5$. Jeśli len$(s) = 3$, to s oddała swój początkowy ładunek wierzchołkom, więc musi mieć wierzchołek przylegający oddający ładunki (o stopniu 3). Jeśli len$(s) = 4$ lub 5, to ładunek s wynosi $12 - 3\text{len}(s) +$ [liczba zyskanych ładunków], a zatem musi mieć przylegający wierzchołek oddający ładunki (o stopniu 3). Wobec tego mamy szukaną parę ściana - wierzchołek. Analogiczne rozumowanie w przypadku wierzchołka o dodatnim ładunku (istotnie korzystając z założenia o minimalnym stopniu). □

2 Kolorowanie grafów planarnych

Zauważmy, że fakt, iż każdy graf planarny ma wierzchołek stopnia co najwyżej 5 implikuje, że jego liczba chromatyczna wynosi co najwyżej 6. Udowodnimy teraz fakt mocniejszy:

Twierdzenie 3. *Dla każdego grafu planarnego G zachodzi $\chi(G) \leqslant 5$.*

Dowód. Indukcja po liczbie wierzchołków.
Baza - oczywista.
Rozważmy graf planarny G. Niech v będzie wierzchołkiem o minimalnym stopniu w G. Z założenia indukcyjnego 5-kolorujemy $G - v$ na kolory $1, ..., 5$ (kolorowanie c). Jeśli $\deg(v) \leqslant 4$, to możemy

łatwo rozszerzyć to kolorowanie do 5-kolorowania G.

Załóżmy, że $\deg(v) = 5$ - problem byłby tylko wtedy, gdyby 5 sąsiadów v miało wszystkie 5 kolorów. Użyjemy techniki łańcuchów Kempego. Wybierzmy planarny rysunek grafu G. Bez straty ogólności załóżmy, że kolory w sąsiedztwie v zaczynając od pewnego sąsiada v układają się zgodnie z kierunkiem wskazówek zegara w kolejności $1, ..., 5$. Zdefiniujmy

$$X_{1,3} := \{w \in V(G - v) : c(w) = 1 \text{ lub } c(w) = 3\}.$$

Rozważmy spójną składową C grafu $G[X_{1,3}]$ zawierającą sąsiada wierzchołka v.

Jeśli C zawiera tylko jednego sąsiada v to zamieniamy w tej składowej kolory 1 i 3 - dzięki temu z sąsiedztwa v znika jeden z kolorów 1, 3 i możemy rozszerzyć otrzymane kolorowanie do 5-kolorowania G.

Jeśli C zawiera dwóch sąsiadów v, to znaczy, że sąsiadów v w kolorach $1, 3$ łączy ścieżka $1, 3$-kolorowa. Zdefiniujemy analogicznie $X_{2,4}$. Wnioskujemy, że na rozważanym rysunku planarnym sąsiedzi v w kolorach 2 i 4 są "odcięci od siebie" ścieżką $1, 3$-kolorową, tj. w grafie $G[X_{1,3}]$ znajdują się w różnych składowych spójności. Wobec tego możemy w tym przypadku w składowej $G[X_{1,3}]$ zawierającej sąsiada v w kolorze 2 zamienić kolory 2 i 4. W tak otrzymanym kolorowaniu wierzchołek v nie ma sąsiada w kolorze 2, a więc możemy to kolorowanie bezpośrednio rozszerzyć do 5-kolorowania G. □

Autorem innego dowodu tego twierdzenia jest Thomassen - dowód ten jest ogólniejszy, bo działa dla listowej wersji kolorowania.

Definicja 4. G jest k-listowo kolorowalny, jeśli dla każdego przyporządkowania wierzchołkom list kolorów $L : V(G) \to 2^{\mathbb{N}}$ spełniającego $\forall_{v \in V(G)} |L(v)| \geqslant k$ istnieje poprawne kolorowanie G używające w każdym wierzchołku koloru z jego listy.

Podkreślmy przy tym, że k-listowa kolorowalność grafu implikuje k-kolorowalność tego grafu.

Twierdzenie 5 (Thomassen)**.** *Każdy graf planarny jest* 5*-listowo kolorowalny.*

Dowód. Niech G' będzie grafem planarnym, ustalmy jego planarny rysunek i striangularyzujmy go wewnętrznie, tj. tak, by każda ściana poza zewnętrzną była trójkątem (niech ten graf będzie oznaczony przez G). Oznaczmy wierzchołki leżące na zewnętrznej ścianie jako kolejno zgodnie z kierunkiem wskazówek zegara $v_1, ..., v_s$.

Udowodnimy, że: jeśli dla każdego wierzchołka v z wnętrza rysunku zachodzi $|L(v)| \geqslant 5$, a dla $i = 3, ..., s$ zachodzi $|L(v)| \geqslant 3$ oraz zachodzi $|L(v_1)| = |L(v_2)| = 1$ i $L(v_1) \neq L(v_2)$, to graf ten można pokolorować przy pomocy list L. Zauważmy, że to wystarczy, by uzyskać tezę twierdzenia.

Użyjemy indukcji po liczbie wierzchołków.

Baza indukcji to trójkąt z wierzchołków v_1, v_2, v_3 - ponieważ $L(v_3) \geqslant 3$ i $L(v_1) \neq L(v_2)$, to można poprawnie pokolorować.

Krok indukcyjny - dwa przypadki:

1° Istnieje cięciwa cyklu $v_1, ..., v_s$, powiedzmy $v_i v_j \in E(G)$. Wtedy krawędź $v_i v_j$ dzieli rysunek grafu na dwie części, powiedzmy L i P. Pokolorujmy najpierw z założenia indukcyjnego tę część, która zawiera krawędź $v_1 v_2$ na brzegu, łącznie z v_i, v_j. Teraz przy wyznaczonych kolorach dla v_i, v_j możemy zastosować założenie indukcyjne również do drugiej części łącznie z v_i, v_j (kładąc dla v_i, v_j odpowiednie listy jednoelementowe - zgodnie z wcześniej wyznaczonymi kolorami). Te dwa kolorowania tworzą łącznie kolorowanie G.

2° Nie istnieje cięciwa cyklu $v_1, ..., v_s$. Oznaczmy sąsiadów wierzchołka v_s poza v_1 i v_{s-1} jako $x_1, ..., x_r$ (żaden z nich nie leży na cyklu zewnętrznym). Bez straty ogólności załóżmy, że $L(v_1) = \{1\}$. $L(v_s)$ zawiera co najmniej dwa kolory różne od 1, powiedzmy a, b. Zdefiniujmy $L'(x_i) := L(x_i) \setminus \{a, b\}$, a dla pozostałych wierzchołków z $G - v_s$ niech L' równe L. Wtedy $G - v_s$ z założenia indukcyjnego możemy pokolorować przy użyciu list L'. Teraz zauważmy, że spośród sąsiadów v_s tylko v_{s-1} może być pokolorowany na kolor a lub b. Oznacza to, że dla v_s mamy wolny kolor i możemy rozszerzyć to kolorowanie do poprawnego kolorowania G przy pomocy kolorów z list L. □

Okazuje się, że w przypadku grafów planarnych bez trójkątów możemy uzyskać dużo więcej:

Twierdzenie 6 (Grotsch)**.** *Jeśli G jest grafem planarnym bez trójkątów, to jest on 3-kolorowalny.*

Teraz zajmiemy się królewskim wynikiem w tej materii, czyli twierdzeniem o 4 kolorach dla grafów planarnych. Jego pierwszy dowód opublikowali w 1976 roku Appel i Hacken - bardzo mocno wykorzystywał on sprawdzanie przypadków przez komputer i budził poważne wątpliwości. Wiele lat później (1994) panowie N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour, R. Thomas przedstawili zmodyfikowany dowód opierający się na tych samych ideach - bardziej przejrzysty i uproszczony, chociaż wciąż po części korzystający z komputera. Stał się pierwszym zaakceptowanym przez środowisko matematyczne. Później pojawiły się jeszcze inne dowody, ale my skupimy się na naszkicowaniu wspomnianego uproszczenia z 1994 roku.

Twierdzenie 7 (Appel, Hacken)**.** *Każdy graf planarny jest 4-kolorowalny.*

Szkic dowodu. Przypuśćmy, że istnieje kontrprzykład. Niech G będzie minimalnym wierzchołkowo kontrprzykładem, na dodatek striangularyzowanym (można pokazać, że jest możliwa triangularyzacja bez dodawania wierzchołków).

Zauważmy najpierw, że minimalny stopień w G musi wynosić 5, bo inaczej byśmy mogli pokolorować na 4 kolory G bez wierzchołka o stopniu co najwyżej 4 i potem przy pomocy łańcuchów Kempego rozszerzyć to kolorowanie do 4-kolorowania G.

Pierwszy krok to pokazanie, że nie ma w G separujących cykli długości $\leqslant 4$, a długości 5 mogą być tylko takie, które mają jeden wierzchołek po jednej ze stron. Sprawa cykli długości mniejszej niż 4 to dość proste ćwiczenie do rozrysowania, zajmiemy się tymi trudniejszymi.

Przypuśćmy, że istnieje taki 4-cykl C. Powiedzmy, że wierzchołki tego cyklu odczytywane zgodnie z kierunkiem wskazówek zegara (począwszy od jednego z nich) to x, y, z, t, niech H_1 będzie oznaczało część grafu na zewnątrz cyklu C (łącznie z cyklem C), a H_2 część grafu wewnątrz cyklu C (łącznie z cyklem C). Teraz zauważmy, że z minimalności G jako kontrprzykładu mamy:

1.1 $H_1 + yt$ jest 4-kolorowalny

1.2 $H_1 + xz$ jest 4-kolorowalny

2.1 $H_2 + yt$ jest 4-kolorowalny

2.2 $H_2 + xz$ jest 4-kolorowalny

Sekwencje kolorów na wierzchołkach x, y, z, t będziemy skrótowo zapisywać w postaci (a, b, c, d) i rozważać tylko z dokładnością do zamiany nazw kolorów. Podkreślmy, że powyższe podpunkty zawsze dadzą na x, y, z, t zestaw co najmniej 3 różnych kolorów. Weźmy pod uwagę dwa przypadki:

1° Jeśli 1.1 lub 1.2 dało na x, y, z, t sekwencję $(1, 2, 3, 4)$ oraz 1.1 lub 1.2 dało sekwencję $(1, 2, 3, 4)$ to możemy te kolorowania dopasować, połączyć i stworzyć 4-kolorowanie grafu G.

2° Jeśli 1.1 oraz 1.2 dały na x, y, z, t sekwencje z powtarzającym się kolorem (odpowiednio $(1, 2, 1, 3)$ i $(1, 2, 3, 2)$, to:
Jeśli 2.1 dało sekwencję $(1, 2, 1, 3)$, to pasuje ona z sekwencją z 1.1 i moglibyśmy rozszerzyć kolorowanie do 4-kolorowania G.
Jeśli 2.1 dało sekwencję $(1, 2, 3, 4)$, to możemy rozważyć to kolorowanie $H_2 + yt$ jako kolorowanie H_2. Wtedy z argumentu z łańcuchami Kempego możemy zmienić tę sekwencję na $(1, 2, 3, 2)$ lub możemy zmienić tę sekwencję na $(1, 2, 1, 4)$ (czyli $(1, 2, 1, 3)$). Sekwencja $(1, 2, 3, 2)$ pasuje do kolorowania 1.2, zaś $(1, 2, 1, 3)$ pasuje do kolorowania 1.1.

W każdym przypadku otrzymaliśmy możliwość pokolorowania G tylko 4 kolorami, co jest sprzecznością z założeniem - wykluczyliśmy 4-cykle.

Można pokazać, że graf planarny striangularyzowany G jest 4-kolorowalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $f : E(G) \to \{a, b, c\}$ taka, że w każdej ścianie (czyli trójkącie) występują wszystkie etykiety a, b, c.
(Szkic: wykorzystać następującą "ściągawkę": krawędzie w kolorach $1-2$ oraz $3-4$ to etykieta a, krawędzie w kolorach $1-4$ oraz $2-3$ to etykieta b, zaś krawędzie $1-3$ oraz $2-4$ to etykieta c. Można sprawdzić, że bezpośrednio w ten sposób z 4-kolorowania otrzymamy poprawne (w powyższym sensie) etykietowanie krawędzi. Z kolei by z etykietowania krawędzi uzyskać 4-kolorowanie wystarczy wybrać w dowolnym wierzchołku kolor i dalej chodzić po grafie kolorując zgodnie ze "ściągawką".)

Teraz zajmiemy się 5-cyklami. Przypuśćmy, że istnieje w G taki 5-cykl $C = v_1, ..., v_5$, że w każdym z odseparowanych kawałków jest więcej niż jeden wierzchołek (możemy założyć, że jest indukowany, bo gdyby miał cięciwę to pewien jego "podcykl" też byłby separujący i krótszy). Oznaczmy te części (każdą łącznie z cyklem C) jako H_1 i H_2. Będziemy korzystać z łańcuchów Kempego w wersji z etykietowaniem krawędzi w sposób następujący: jeśli popatrzymy na H_i i pewna krawędź w cyklu jest etykietowana a, to w trójkącie przylegającym do tej krawędzi w H_i jest krawędź e_a etykietowana b, potem "po drugiej stronie" $e_{a,1}$ (czyli w drugim trójkącie do niej przylegającym) szukamy następnej krawędzi etykietowanej a i tak na przemian. Jeśli nasz łańcuch skończy się np. krawędzią z cyklu C etykietowaną b to znaczy, że możemy zamienić na całym łańcuchu etykiety a i b bez zepsucia etykietowania w ramach H_i i dzięki temu zmienić konfigurację etykiet na cyklu C. Będziemy na (maksymalnej długości) zestaw kolejnych krawędzi z sąsiadujących trójkątów etykietowanych a i b mówić ab-łańcuch i analogicznie dla pozostałych etykiet. Podkreślmy, że będziemy widzieć konfiguracje etykiet z dokładnością do zamiany nazw etykiet.

Zauważmy, że na każdym H_i musi istnieć przynajmniej jedno etykietowanie krawędzi takie, że na C mamy trzy razy obok siebie tę samą etykietę (powiedzmy c) i po razie pozostałe (obok siebie). Wystarczy do H_i dołożyć jeden wierzchołek v i połączyć z wierzchołkami z C otrzymując wciąż graf mniejszy niż G (bo po każdej stronie separującego cyklu C jest więcej niż jeden wierzchołek), a więc z minimalności G graf 4-kolorowalny, czyli etykietowany w rozważanym sensie. Etykiety wychodzące z v muszą występować (z dokładnością do przesunięcia) w konfiguracji $ababc$ (żadna etykieta nie może wystąpić 3 razy). Można więcej łatwo sprawdzić, że to implikuje na krawędziach cyklu C sekwencję $cccab$ (przy odczytaniu poczynając od odpowiedniej krawędzi).

Ponumerujmy krawędzie C w sposób następujący: $e_1 = v_1v_2$ i dalej e_i według cyklu. Będziemy skrótowo zapisywać konfiguracje na krawędziach z C jako ciąg kolejnych etykiet odczytywanych poczynając od e_1. Zajmiemy się głównie grafem H_1 i to na nim przede wszystkim będziemy dobierać odpowiednie etykietowania, które potem będziemy dopasowywać do H_2. Niech teraz zdanie $\alpha(i,j)$ będzie prawdziwe jeśli istnieje etykietowanie H_1 takie, że e_i ma a, e_j ma b, a na pozostałych krawędziach z C mamy c. Wiemy już, że jakieś $\alpha(i,i+1)$ (dla uproszczenia notacji $5+1$ to 1) jest prawdziwe.

Jeśli dla każdego i mamy $\alpha(i,i+1)$, to można łatwo dopasować do etykietowania na H_2 i stworzyć etykietowanie G, czyli G nie byłby kontrprzykładem.

Załóżmy (bez straty ogólności), że $\alpha(1,2)$, ale $\neg\alpha(2,3)$. Popatrzmy na ac łańcuch w H_1 z e_1 przy etykietowaniu będącemu świadkiem $\alpha(1,2)$. Nie może się on skończyć w e_3, bo mielibyśmy $\alpha(2,3)$ (poprzez podmianę etykiet). Nie może się skończyć w e_4 z planarności. Zatem musi być, że kończy się w e_5, a więc mamy $\alpha(2,5)$.

Rozważmy dwa przypadki:

1° Prawdą jest $\alpha(1,5)$. Rozważmy graf H_0 zdefiniowany jako H_2 z utożsamieniem wierzchołków v_3 i v_5. Tak powstały graf też jest striangularyzowany. Etykietowanie musi dać na krawędziach z trójkąta v_1, v_3, v_2 trzy różne etykiety, powiedzmy, że e_1 ma a, e_2 ma b i $v_5v_1 = v_3v_1$ ma c. Wtedy po rozlepieniu mamy poprawne etykietowanie H_2 i teraz w zależności od etykiety x na e_3 i e_4 (tej samej!) bedziemy mogli dopasować do etykietowania H_1: $x = a$ pasuje do realizacji $\alpha(1,2)$, $x = b$ pasuje do realizacji $\alpha(2,5)$, $x = c$ pasuje do realizacji $\alpha(1,5)$. Wtedy otrzymalibyśmy przez sklejenie tych etykietowań etykietowanie całego G i nie byłby on kontrprzykładem.

2° Prawdą jest $\neg\alpha(1,5)$. Popatrzmy na bc-łańcuch w realizacji $\alpha(2,5)$ z krawędzi e_2: Nie może się on kończyć w e_1, bo wtedy byłoby prawdą $\alpha(1,5)$. Nie może się kończyć w e_4, bo przeczyłoby to planarności. Wobec tego musi kończyć się w e_3 dając nam $\alpha(3,5)$. Popatrzmy teraz na bc-łańcuch w realizacji $\alpha(1,2)$ z krawędzi e_2: Nie może się kończyć w e_5, bo wtedy zachodziłoby $\alpha(1,5)$. Nie może się też kończyć w e_4 z planarności. Wobec tego kończyć się musi w e_3 dając nam $\alpha(1,3)$.

teraz możemy do H_2 dołożyć dwie cięciwy wychodzące z v_2 i poetykietować tak otrzymany graf. Można sprawdzić, że mając etykietowania realizujące $\alpha(1,2)$, $\alpha(1,3)$, $\alpha(5,3)$, $\alpha(5,2)$ dopasujemy do etykietowania uzyskanego w powyższy sposób w H_2.

Ostatecznie więc wykluczyliśmy istnienie w G cyklu długości 5, który byłby separujący i po każdej ze stron miałby więcej niż jeden wierzchołek.

Bardzo krótko o tym co odbywa się potem: Dalej następuje "walka" z konfiguracjami (układy, które nie powinny się pojawić w kontrprzykładzie). Daną konfigurację się w pewien sposób uzupełnia, by otrzymać cykl ją otaczający o pewnych własnościach, następnie wymazuje się "wnętrze" tego cyklu i następują działania na xy-łańcuchach (dla x, y - etykiety) i podmiany etykiet. Komputerowo sprawdza się te konfiguracje (jest ich 633). Potem dowód wykorzystuje metodę dischargingu - w skomplikowany sposób przy pomocy komputera sprawdza się, że obok wierzchołków o dodatnich ładunkach pojawi się konfiguracja. $\square$