Wykład 3 (8.03.2013) Opracowała: Barbara Pilat

Twierdzenie o kracie

Głównym celem dzisiejszego wykładu będzie dowód następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1. *[4] Istnieje stała c taka, że dla każdego grafu G jeśli $tw(G) > t^{ct^5}$, to minorem grafu G jest krata $t \times t$.*

Dowód. Oznaczmy $c_i = t^{2^i t}$, zauważmy, że $c_i^2 = c_{i+1}$ i załóżmy, że $tw(G) > t^{2^7 t^5} = c_7^{t^4}$. Z Twierdzenia 12. z Wykładu 2.0 wiemy, że wówczas w grafie G jest $(2c_6^{t^4}, 2t^2 c_6^{t^4})$-splątanie. Drzewo z tego splątania tniemy tak, jak w Zadaniu 11. i otrzymujemy t^2 placków wielkości $c_6^{t^4}$ - nazwijmy je $A_1, A_2, \ldots, A_{t^2}$. Z definicji splątania, dla każdej pary (i, j) mamy $c_6^{t^4}$ ścieżek z A_i do A_j rozłącznych wierzchołkowo.

Intuicja na dalszą część dowodu będzie taka: będziemy wybierać z każdej pary A_i, A_j po jednej ścieżce, globalnie rozłącznie, i otrzymamy klikę K_{t^2}. A jeśli nam się to nie uda, to znajdziemy tam kratę $t \times t$.

Ponumerujmy wszystkie pary (i, j) takie, że $1 \leqslant i < j \leqslant t^2$, następująco: $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_{\binom{t^2}{2}}, j_{\binom{t^2}{2}})$. W tej kolejności będziemy robić kolejne kroki konstrukcji kliki. Na początku dla każdego i, j mamy rodzinę ścieżek $\mathcal{P}^0_{i,j}$ mocy $c_6^{t^4}$. W kroku l:

- dla $a < l$ mamy wybraną ścieżkę P_{i_a,j_a},
- dla $b \geqslant l$ mamy rodzinę ścieżek $\mathcal{P}^l_{i_b,j_b}$ mocy $c_6^{t^4-l+1}$ taką, że dla każdych $a < l \leqslant b$ P_{i_a,j_a} i $\mathcal{P}^l_{i_b,j_b}$ są rozłączne.

Kiedy uda się zrobić krok l? Jeśli istnieje ścieżka $P \in \mathcal{P}^l_{i_l,j_l}$ taka, że dla każdego $b > l$ zachodzi $\left|\left\{Q \in \mathcal{P}^l_{i_b,j_b} : Q \cap P = \emptyset\right\}\right| \geqslant c_6^{t^4-l} = \frac{|\mathcal{P}^l_{i_b,j_b}|}{c_6}$. Jeśli udało nam się zrobić $\binom{t^2}{2}$ kroków, to mamy klikę $K_{\binom{t^2}{2}}$ jako minor G, a z tej kliki możemy wybrać kratę $t \times t$.

Jeśli się nie udało dojść do końca, to znaczy, że istnieje l takie, że dla każdej ścieżki $P \in \mathcal{P}^l_{i_l,j_l}$ istnieje $b > l$ takie, że

$$\left|\left\{Q \in \mathcal{P}^l_{i_b,j_b} : Q \cap P = \emptyset\right\}\right| < \frac{|\mathcal{P}^l_{i_b,j_b}|}{c_6} \tag{1}$$

Zatem, z zasady szufladkowej Dirichleta, istnieje rodzina ścieżek $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}^l_{i_l,j_l}$ i istnieje $b > l$ takie, że dla każdej ścieżki $P \in \mathcal{P}$ zachodzi (1) oraz $|\mathcal{P}| \geqslant \frac{|\mathcal{P}^l_{i_l,j_l}|}{\binom{t^2}{2}-l} \geqslant \frac{|\mathcal{P}^l_{i_l,j_l}|}{t^4} = \frac{c_6^{t^4-l+1}}{t^4} \geqslant c_6$. Mamy wię ustalone indeksy b i l oraz ścieżki $\mathcal{P}$, których jest dużo, i każda ścieżka z $\mathcal{P}$ zna prawie wszystkie ścieżki z $\mathcal{P}^l_{i_b,j_b}$ (dokładnie zna $\geqslant c_6^{t^4-l+1} - \frac{c_6^{t^4-l+1}}{c_6}$ ścieżek z $\mathcal{P}^l_{i_b,j_b}$).

Zdefiniujmy teraz $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}$ i $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}^l_{i_b,j_b}$ tak, żeby:

- $|\mathcal{P}_1| = t^2$,
- $|\mathcal{P}_2| \geqslant c_5$,
- dla każdych $P_1 \in \mathcal{P}_1, P_2 \in \mathcal{P}_2$ było $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$.

Będzie to baza do wybierania kraty. Zrobimy to tak: niech $P_1 := \emptyset$, $P_2 := \mathcal{P}^l_{i_b,j_b}$ i dopóki $|P_1| < t^2$ wybieramy ścieżkę $P \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_1 := \mathcal{P}_1 \cup \{P\}$ i wyrzucamy z $\mathcal{P}_2$ wszystkie te ścieżki, które są rozłączne z P.

Teraz chcemy zrobić kratę. Zdefiniujmy: $E_1 = E(\mathcal{P}_1)$, $E_2 = E(\mathcal{P}_2)$, $H = (V(G), E_1 \cup E_2)$. Dopóki w H istnieje t^2 ścieżek o tych samych końcach jak $\mathcal{P}_1$, wyrzucamy jakąś krawędź z $E_1 \setminus E_2$ (jest to takie "prostowanie" ścieżek z $\mathcal{P}_1$). W ten sposób rodzina $\mathcal{P}_1$ zamieni się w $\widehat{\mathcal{P}_1}$ taką, że $\widehat{E_1} = E(\widehat{\mathcal{P}_1})$ oraz dla każdej krawędzi $e \in \widehat{E_1} \setminus E_2$ w grafie $(V(G), \widehat{E_1} \cup E_2 \setminus \{e\})$ nie ma t^2 ścieżek o tych samych końcach jak $\mathcal{P}_1$.

Mamy teraz $|\widehat{\mathcal{P}_1}| = t^2$ i $|\mathcal{P}_2| \geqslant c_5$. Weźmy ścieżkę $Q \in \widehat{\mathcal{P}_1}$. Idziemy ścieżką Q i stawiamy kreskę jak spotkamy c_4c_3 (różnych) ścieżek z $\mathcal{P}_2$, idziemy dalej i robimy to samo (liczymy tylko zupełnie nowe ścieżki, tzn. takie, które do tej pory się nie pojawiły, nawet w poprzednich blokach) - podzielimy w ten sposób ścieżkę Q na c_3 bloków (bo $c_5 = c_4c_3c_3$). Niech $e_i \in E(\widehat{\mathcal{P}_1}) \setminus E(\mathcal{P}_2)$ będą krawędziami oddzielającymi kolejne bloki na ścieżce Q.

Ponieważ dla każdego i graf $\widehat{H} = (V(G), E(\widehat{\mathcal{P}_1}) \cup E(\mathcal{P}_2) \setminus \{e_i\})$ nie ma t^2 ścieżek o końcach takich jak $\widehat{\mathcal{P}_1}$, mamy bloker $X_i \subset V(G)$, z twierdzenia Mengera $|X_i| = t^2 - 1$, oraz dla każdej ścieżki $R \in \widehat{\mathcal{P}_1}$ mamy $R \cap Q = \emptyset$ i $|R \cap X_i| = 1$.

Weźmy ścieżkę $P \in \mathcal{P}_2$ taką, że $P \cap X_i = \emptyset$ dla każdego i. Dlaczego możemy to zrobić? Bo $|\bigcup_{i=1}^{c_3} X_i| \leqslant t^2 c_3 < c_4$, a $|\mathcal{P}_2| \geqslant c_5$, więc większość ścieżek z $\mathcal{P}_2$ nie dotyka żadnego X_i. Zauważmy, że P przecina wszystkie ścieżki $R \in \widehat{\mathcal{P}_1}$ przed X_i, e_i albo wszystkie po X_i, e_i. Niech, dla ustalenie uwagi, P przecina Q między e_i a e_{i+1}. Wówczas P jest na prawo od X_i i na lewo od X_{i+1}. Ponieważ w każdym bloku Q przecina $c_4c_3 > t^2c_3$ ścieżek z $\mathcal{P}_2$, zatem możemy mieć w każdym bloku ścieżkę z $\mathcal{P}_2$, która przecina wszystkie ścieżki z $\widehat{\mathcal{P}_1}$. I to jest zalążek naszej kraty.

Popatrzmy teraz na blok między X_i, e_i a X_{i+1}, e_{i+1}. Ściągamy w nim każdą ścieżkę z $\widehat{\mathcal{P}_1}$ do punktu i powstaje multigraf K_i o t^2 wierzchołkach. Niech T_i będzie drzewem rozpinającym ten multigraf. Z Zadania 10. wynika, że T_i ma t liści $(Q_1^i, Q_2^i, \ldots, Q_t^i)$ lub t-ścieżkę $(Q_1^i, Q_2^i, \ldots, Q_t^i)$. Wybieramy $I \subset \{1, 2, \ldots, c_3\}$ o maksymalnej mocy taki, że dla każdego $i \in I$ ciąg $(Q_1^i, Q_2^i, \ldots, Q_t^i) =: (Q_1, Q_2, \ldots, Q_t)$ jest taki sam. Z zasady szufladkowej mamy $|I| \geqslant \frac{c_3}{(t^2)^t} = \frac{c_3}{t^{2t}} = \frac{c_3}{c_1} = c_2c_1 > t^2$.

Nasza krata wygląda tak: poziome krawedzie to ścieżki $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$. Z każdej ścieżki lub zbioru liści dostaję przez ściągnięcie jedną pionową krawędź. □

Udowodniliśmy twierdzenie o kracie z założeniem, że $tw(G) > t^{ct^5}$. Niedawno pokazano, że wystarczy wielomianowe ograniczenie treewithu, zob. [1]. Dla grafów planarnych dobrze jest z liniowym ograniczeniem treewithu.

Twierdzenie 2. *[5, 3] Jeśli G jest grafem planarnym oraz $tw(G) > 5t$, to minorem grafu G jest krata $t \times t$.*

Na koniec wspomnijmy jeszcze, że prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3. *[2] Dla każdego grafu H istnieje stałą $c(H)$ taka, że dla każdego grafu G, jeśli H nie jest minorem G i $tw(G) > c(H)t$, to minorem grafu G jest krata $t \times t$.*

Literatura

[1] Chandra Chekuri and Julia Chuzhoy. Polynomial bounds for the grid-minor theorem. *CoRR*, abs/1305.6577, 2013.

[2] Erik D. Demaine and MohammadTaghi Hajiaghayi. Linearity of grid minors in treewidth with applications through bidimensionality. *Combinatorica*, 28(1):19–36, 2008.

[3] Alexander Grigoriev. Tree-width and large grid minors in planar graphs. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, 13(1):13–20, 2011.

[4] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors. x. obstructions to tree-decomposition. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 52(2):153–190, 1991.

[5] Neil Robertson, Paul D. Seymour, and Robin Thomas. Quickly excluding a planar graph. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 62(2):323–348, 1994.