Wykład 2.5 (01.03.2013) Opracowała: Magdalena Bojarska

Ciernie i ich związek z treewidth

Na początek wprowadzimy kilka pojęć i definicji. Mówimy, że zbiór $B \subseteq V(G)$ jest spójny, jeśli $G[B]$ jest spójny. Zbiory B_1 i B_2 się dotykają jeśli $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ lub $\exists_{uv \in E(G)} u \in B_1, v \in B_2$

Definicja 1. Rodzinę $\mathbb{B}$ nazywamy *cierniem* jeżeli $\forall_{B \in \mathbb{B}} B$ jest spójny oraz jeśli $\forall_{B_1, B_2 \in \mathbb{B}}$ B_1 i B_2 się dotykają.

Powiemy, że $X \subseteq V(G)$ *trafia* cierń $\mathbb{B}$ jeżeli $\forall_{B \in \mathbb{B}} X \cap B \neq \emptyset$. Rząd ciernia $n(\mathbb{B})$ to minimalna moc zbioru X trafiającego $\mathbb{B}$, czyli $n(\mathbb{B}) = \min\{|X| : X \text{ trafia } \mathbb{B}\}$

Na ćwiczeniach rozważaliśmy następującą grę: w grafie G mamy złodzieja i k policjantów. Złodziej dysponuje szybkim motorkiem, a policjanci helikopterami. Pomiędzy turami każda osoba okupuje jakiś wierzchołek grafu. Tura wygląda następująco:

1. pewien podzbiór policjantów wznosi się ze swoich miejsc i deklaruje, gdzie będzie lądować;
2. złodziej się przemieszcza, ale nie może przechodzić przez wierzchołki, w których stoi policjant;
3. policjanci lądują.

Policjanci wygrywają, jeśli jakiś policjant wyląduje w wierzchołku, gdzie jest złodziej.
Wykazaliśmy, że minimalna liczba policjantów potrzebna do złapania złodzieja to $tw(G) + 1$. Zauważmy teraz, że

Obserwacja 2. Jeżeli mamy dany cierń $\mathbb{B}$ i w rozważanym grafie znajduje się mniej niż $n(\mathbb{B})$ policjantów, to złodziej może uciec

Dowód. Rozważmy następującą strategię złodzieja: złodziej zawsze stoi w zbiorze $B \in \mathbb{B}$, w którym nie ma policjantów. W momencie, w którym policjanci się podnoszą, uwalnia się także pewien inny zbiór. Ale skoro mamy do czynienia z cierniem, to dwa rozważane zbiory się dotykają i złodziej może się przemieścić. □

Definicja 3. Bramble number to liczba $BN(G) = \max\{n(\mathbb{B}) : \mathbb{B} \text{ cierń w } G\}$

Wniosek 4. *Jeżeli w grafie G policjantów jest mniej niż $BN(G)$, to złodziej może uciec.*

Na ćwiczeniach pokazaliśmy, że $tw(G) + 1$ policjantów wystarcza, aby złapać złodzieja w grafie G. Oznacza to, że $tw(G) + 1 \geqslant BN(G)$. Przekładając to na język teorii grafów otrzymujemy następujące

Stwierdzenie 5. *Jeżeli $\mathbb{B}$ jest cierniem, a $(T, (V_t)_{t \in T})$ dekompozycją grafu G, to istnieje $t \in T$, takie że V_t trafia cierń.*

Dowód. Weźmy $t_1, t_2 \in T$ połączone krawędzią w T. Niech X_1 będzie zbiorem wierzchołków znajdujących się po tej stronie krawędzi $t_1 t_2$, co wierzchołek t_1. Analogicznie definiujemy X_2. Jeżeli $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ trafia $\mathbb{B}$, to ok. W przeciwnym przypadku popatrzmy na $B \in \mathbb{B}$ takie, że $B \cap (V_{t_1} \cap V_{t_2}) = \emptyset$. Wówczas $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ oddziela $X_1 \setminus X_2$ i $X_2 \setminus X_1$. Ale skoro B jest spójny, to $B \subseteq X_1 \setminus X_2$ lub $B \subseteq X_2 \setminus X_1$ Z drugiej strony, dla dowolnych $B_1, B_2 \in \mathbb{B}$ B_1, B_2 się dotykają, więc $B_1, B_2 \subseteq X_1 \setminus X_2$ lub $B_1, B_2 \subseteq X_2 \setminus X_1$. A zatem wszystkie nietrafione $B \in \mathbb{B}$ znajdują się wszystkie w $X_1 \setminus X_2$ lub $X_2 \setminus X_1$. Zorientujmy zatem krawędź t_1t_2, tak aby wskazywała w stronę, gdzie znajdują się te zbiory. Analogicznie orientujemy pozostałe krawędzie drzewa. W tak otrzymanym grafie istnieje ujście t. To jednak oznacza, że V_t trafia $\mathbb{B}$. □

Twierdzenie 6 (Seymour - Thomas, 1993)**.** $BN(G) = tw(G) + 1$

Dowód. Potrzebujemy pokazać jedynie nierówność $BN(G) \geqslant tw(G)+1$ (nierówność w drugą stronę została wykazana wcześniej). Idea stojąca za poniższym dowodem jest następująca: zbiory trafiające ciernie są dobrymi kandydatami na worki.

Niech $BN(G) = k$. Będziemy konstruować dekompozycję o $\max |V_t| \leqslant k$. Dokładniej, dla każdego ciernia $\mathbb{B}$ w G skonstruujemy $(T^{\mathbb{B}}, (V_t^{\mathbb{B}})_{t \in T^{\mathbb{B}}})$ o następującej własności: jeśli $|V_t^{\mathbb{B}}| > k$, to nie trafia on $\mathbb{B}$. Będziemy to robić indukcyjnie w dół po rozmiarze cierni - łatwo zauważyć, że w momencie, gdy dojdziemy do $(T^{\emptyset}, (V_t^{\emptyset})_{t \in T^{\emptyset}})$, będzie to koniec dowodu twierdzenia.

Weźmy cierń $\mathbb{B}$ i załóżmy, że dla każdego ciernia $\hat{\mathbb{B}}$, takiego, że $|\mathbb{B}| < |\hat{\mathbb{B}}|$ istnieje dekompozycja $(T^{\hat{\mathbb{B}}}, (V_t^{\hat{\mathbb{B}}})_{t \in T^{\mathbb{B}2}})$. Niech X trafia $\mathbb{B}$, $|X| = l = n(\mathbb{B}) \leqslant k$ (tj., moc X jest najmniejsza możliwa). Niech C będzie spójną składową grafu $G \setminus X$. Chcemy skonstruować dekompozycję $G[X \cup V(C)]$ taką, aby X był jednym z worków. Zauważmy, że $C \notin \mathbb{B}$, bo X trafia $\mathbb{B}$, a $X \cap C = \emptyset$.

Niech $\hat{\mathbb{B}} = \mathbb{B} \cup \{C\}$. Mamy dwie możliwości:

- $\hat{\mathbb{B}}$ nie jest cierniem. Wówczas istnieje $B \in \mathbb{B}$ taki, że C nie dotyka B. Zauważmy, że $(C \cup N(C)) \cap B = \emptyset$, więc $C \cup N(C)$ nie trafia $\mathbb{B}$. Bierzemy wówczas jako worki X oraz $C \cup N(C)$.

- $\hat{\mathbb{B}}$ jest cierniem. Z założenia indukcyjnego mamy dekompozycję $(T^{\hat{\mathbb{B}}}, (V_t^{\hat{\mathbb{B}}})_{t \in T^{\hat{\mathbb{B}}}})$ i chcemy ją poprawić dla dobrej dekompozycji dla $\mathbb{B}$ na $C \cup X$. Jeżeli dekompozycja ta jest dobra dla $\mathbb{B}$, to ok. W przeciwnym wypadku, oznacza to, że istnieje worek $Z = V_s^{\hat{\mathbb{B}}}$, który jest za duży i trafia $\mathbb{B}$, a nie trafia $\hat{\mathbb{B}}$. Zauważmy, że wówczas zachodzi $V_s^{\hat{\mathbb{B}}} \cap C = \emptyset$

  Popatrzmy teraz na $C \cup X$. Niech $W_t := V_t^{\hat{\mathbb{B}}} \cap (C \cup X)$. Wtedy $(T^{\hat{\mathbb{B}}}, (W_t)_{t \in T^{\hat{\mathbb{B}}}})$ jest dobrą dekompozycją drzewową dla $G[C \cup X]$, ale może nie zawierać X. Będziemy ją więc poprawiać.

  Obserwacja 7. Istnieje l rozłącznych wierzchołkowo ścieżek między X a $V_s^{\hat{\mathbb{B}}} = Z$.

  Dowód. Przypuśćmy, że nie. Wówczas istnieje Y, takie że $|Y| < l$, takie że Y oddziela X od Z. Zbiory X i Z trafiają $\mathbb{B}$. Niech $B \in \mathbb{B}$. Wówczas $B \cap X \neq \emptyset$ oraz $B \cap Z \neq \emptyset$. B jest spójny, więc $B \cap Y \neq \emptyset$. Stąd Y trafia $\mathbb{B}$. Jest to jednak sprzeczność z wyborem X. □

  Oznaczmy rozważane powyżej ścieżki jako P_i i niech x_i będą końcami tych ścieżek w zbiorze X. Dorzucamy teraz x_i do wszystkich worków na ścieżce między Z a workami, gdzie jest x_i, czyli przeciągamy x_i z tego worka, gdzie leży w T, do worka Z. Otrzymujemy w ten sposób worki $\overline{W_t}$. Zauważmy, że wówczas $\overline{W_s} = X$ i to będzie nóżka do połączenia.

  Fakt 8. $|\overline{W_t}| \leqslant |V_t^{\hat{\mathbb{B}}}|$

  Fakt ten wynika z tego, że jeśli dodaliśmy x_i do W_t, to $V_t^{\hat{\mathbb{B}}} \setminus W_t$ zawiera część ścieżki P_i.

  Przypuśćmy teraz, że $\overline{W_t}$ trafia $\mathbb{B}$ i $|\overline{W_t}| > k$. Wówczas $|V_t^{\hat{\mathbb{B}}}| > k$, więc $V_t^{\hat{\mathbb{B}}}$ nie trafia $\hat{\mathbb{B}}$. Mamy zatem dwie możliwości:

1. $V_t^{\hat{\mathbb{B}}} \cap C = \emptyset$. Wówczas jednak musi zachodzić $\overline{W_t} \subseteq X$, sprzeczność.
2. $\exists_{B \neq C} V_t^{\hat{\mathbb{B}}} \cap B = \emptyset$. Skoro $\overline{W_t}$ pokrywa $\mathbb{B}$, to $\overline{W_t}$ przecina B. A zatem istnieje x_i, który jest zarówno w B jak i w $\overline{W_t} \setminus V_t^{\hat{\mathbb{B}}}$. Oznacza to, że węzeł t leży w drzewie T pomiędzy węzłem s a węzłami, w których workach leży x_i. Spójrzmy teraz na worek $V_s^{\hat{\mathbb{B}}}$: zawiera on coś, co przecina B, bo trafia $\mathbb{B}$. Z drugiej strony, wszystkie worki zawierające x_i przecinają B. Skoro B jest spójny, to przecina również wszystkie worki po drodze, czyli przecina $V_t^{\hat{\mathbb{B}}}$, sprzeczność.

$\square$